

MEDDELANDEN  
FRÅN  
STATENS  
SKOGSFÖRSÖKSANSTALT

HÄFTE 25. 1929

MITTEILUNGEN AUS DER  
FORSTLICHEN VERSUCHS-  
ANSTALT SCHWEDENS

**25. HEFT**

REPORTS OF THE SWEDISH  
INSTITUTE OF EXPERIMENTAL  
FORESTRY

**N:o 25,**

BULLETIN DE L'INSTITUT D'EXPÉRIMENTATION  
FORESTIÈRE DE SUÈDE

**N:o 25**



REDAKTÖR:  
PROFESSOR DR HENRIK HESSELMAN

## INNEHÅLL:

	Sid.
TAMM, OLOF: An Experimental Study on Clay Formation and Weathering of Felspars .....	I
En experimentell studie över lerbildning och vittring av fältspater. ....	27
TRÄGÅRDH, IVAR: Undersökningar över den större snytbaggen och dess bekämpande.....	29
Untersuchungen über den grossen Rüsselkäfer und dessen Bekämpfung. ....	88
NÄSLUND, MANFRED: Antalet provträd och höjdkurvans noggrannhet	93
Die Anzahl der Probestämme und die Genauigkeit der Höhenkurve .....	154
TRÄGÅRDH, IVAR: Om tallbocken och dess bekämpande.....	171
On the Injury of the pine-sawyer ( <i>Monochammus sutor</i> L.) and its prevention.....	219
TIRÉN, LARS: Über Grundflächenberechnung und ihre Genauigkeit	229
Om grundyteberäkning och dess noggrannhet.....	301
<b>Redogörelse för verksamheten vid Statens Skogsförsöksanstalt under år 1929.</b> (Bericht über die Tätigkeit der Forstlichen Versuchsanstalt Schwedens im Jahre 1929. Report on the Work of the Swedish Institute of Experimental Forestry.)	
Allmän redogörelse av HENRIK HESSELMAN .....	305
I. Skogsavdelningen (Forstliche Abteilung, Forestry division) av HENRIK PETTERSON.....	305
II. Naturvetenskapliga avdelningen (Naturwissenschaftliche Abteilung, Botanical-Geological division) av HENRIK HESSELMAN	311
III. Skogsentomologiska avdelningen (Forstentomologische Abteilung, Entomological division) av IVAR TRÄGÅRDH .....	312
IV. Avdelningen för föryngringsförsök i Norrland (Abteilung für die Verjüngungsversuche in Norrland, Division for Afforestation Problems in Norrland) av EDVARD WIBECK.....	314



## ÜBER GRUNDFLÄCHENBERECHNUNG UND IHRE GENAUIGKEIT.

**I**n der forstwissenschaftlichen Arbeit bedient man sich in grosser Ausdehnung quantitativer Messungen, aus deren Resultaten man seine Schlussfolgerungen zu ziehen versucht. Wie auf anderen Gebieten wissenschaftlicher Arbeit werden auch hier die Fortschritte in hohem Grade durch verfeinerte Messmethoden gefördert, die das Auffinden gesetzmässiger Zusammenhänge erlauben, wo zuvor die mangelhaften Arbeitsmethoden alle subtileren Einzelheiten verwischten. Das Material, an welchem der Forstmann seine Messungen macht, ist solcher Natur, dass es oft keine direkte Messung, mit allen den Möglichkeiten der Präzision, wie sie eine solche bietet, gestattet. Auch wenn direkte Messungen ausgeführt werden können, ist die Beschaffenheit des Materials derart, dass sie grosse Schwierigkeiten darbieten. Es ist daher sehr natürlich, dass die fortgesetzte forstwissenschaftliche Arbeit einer möglichst weitgehenden Kenntnis der Zuverlässigkeit ihrer Messmethoden und der Möglichkeiten, sie, wo sie unvollkommen erscheinen, zu verfeinern, nicht entbehren kann. Je schwieriger eine Messung auszuführen ist, um so mehr Gewicht muss man, scheint es, auf das Studium der entstehenden Fehler legen, denn andernfalls kann es geschehen, dass wichtige Schlüsse auf Messresultate gegründet werden, die sich in Zukunft als falsch erweisen werden.

Einer der wichtigsten Gegenstände forstlicher Messungen ist die Grundfläche der Bäume. Diese ist einer der drei für die Kubikmassebestimmung notwendigen Faktoren und der einzige, der bisher im allgemeinen sich direkt messen lässt. Höhe und Form sind die beiden anderen, und an stehenden Bäumen, die durch ihre weitere Entwicklung die Antwort auf unsere Fragen liefern sollen, können wir uns Kenntnis über dieselben nur durch indirekte Messungen verschaffen.

Die Fehler, die wir bei der Grundflächenbestimmung erwarten können, sind nicht sehr gross, aber wir können nicht gut diese Vermutung als einen Grund gegen eine genauere Untersuchung der diesbezüglichen Verhältnisse anführen. Die Gewissheit, dass die Fehler klein sind und sich nicht in Zukunft als hinderlich erweisen werden, hat an und für sich

ebenso grossen Wert wie die Gewissheit, dass sie gross sind. Es sind nur die durch die Untersuchung veranlassten Massnahmen, für die die Grösse der Fehler eine Rolle spielt. Gerade betreffs der Grundflächenmessung bestehen Möglichkeiten, die Fehlerfrage definitiv klarzustellen, Möglichkeiten, die ja so rasch wie möglich ausgenutzt werden müssen, damit das Resultat unserem übrigen Bestande an zuverlässigen und notwendigen Kenntnissen einverleibt werden könne.

## I. Die Grössenveränderungen der Grundfläche.

Gleich den meisten anderen Körpern dehnt sich auch das Holz aus, wenn es erwärmt wird, und zieht sich zusammen, wenn es abgekühlt wird. Innerhalb gewisser Grenzen geschehen diese Grössenveränderungen proportional der Temperaturänderung. Für verschiedene Stoffe ist der Betrag der Ausdehnung oder Zusammenziehung nicht der gleiche für einen bestimmten Temperaturunterschied. Der Unterschied zwischen ihnen wird dadurch präzisiert, dass man die Ausdehnungskoeffizienten der Stoffe angibt, welche Ziffer  $1/100$  der prozentuellen Ausdehnung bei  $1^\circ$  Temperaturerhöhung bezeichnet. Wenn ein Stab z. B. die Länge  $l$  und den linearen Ausdehnungskoeffizienten  $0,0001$  hat, so ist die Länge des Stabes, wenn er um  $1^\circ$  erwärmt wird,  $= l + 0,0001 l = 1,0001 l$ . Wird er um  $10^\circ$  erwärmt, so ist die Länge  $= 1,001 l$  usw., alles jedoch innerhalb gewisser Grenzen.

Bezüglich des Holzes im lebenden Baum liegen keine Angaben über den linearen Ausdehnungskoeffizienten vor, dagegen wird er für trockenes und totes Holz zu durchschnittlich  $0,00005$  angegeben (LANDOLT-BÖRNSTEIN-ROTH, Physikalisch-chemische Tabellen, Tab. 93). Die Längenausdehnung des Holzes ist beträchtlich verschieden in verschiedenen Richtungen. Die oben angegebene Ziffer bezieht sich auf die radiäre Richtung. Wenn man annehmen darf, dass in frischem Holz das Wasser nicht nennenswert die Ausdehnung oder die Zusammenziehung des Holzes beeinflusst, so könnte die obengenannte Ziffer  $0,00005$  im Notfall dazu verwendet werden, Klarheit darüber zu schaffen, was die Temperatur an und für sich bei einer Grundflächenbestimmung bedeuten kann.

In unseren Breitengraden kann ja oft die Temperatur von  $+10^\circ$  bis  $20^\circ$  C im Herbst nach beendeter Vegetationsperiode auf  $-30^\circ$  bis  $40^\circ$  C während des Winters sinken. Es bestehen folglich grosse Möglichkeiten, durch Messungen an den Bäumen zu untersuchen, wie diese in Wirklichkeit auf Temperaturänderungen reagieren. Dies ist auch geschehen. Wir finden z. B., dass eine Temperaturdifferenz von  $40$  —  $50^\circ$  ( $+10$  —  $20^\circ$  bis  $-30^\circ$  C) ein Schrumpfen des Durchmessers um

ungefähr 0,4—0,6 % mit sich bringt (LÖF, KINNMAN, 1925, Tab. 8, S. 35). Nach ROMELL (1925), der 13 St. Kiefern in dieser Hinsicht untersucht hat, betrug die Durchmesserschrumpfung (einschliesslich der Rinde) für einen Temperaturunterschied von  $40^{\circ}$  ( $+8^{\circ}$  bis  $-32^{\circ}$  C) durchschnittlich 0,6 %.

Für  $40^{\circ}$  Temperaturänderung sollte jedoch die Durchmesseränderung, wenn sie aus dem Ausdehnungskoeffizienten berechnet wird, nur  $40 \times 100 \times 0,00005 = 0,2$  % betragen. Die wirkliche Durchmesseränderung ist also ungefähr dreimal so gross wie die erwartete.

Wie ROMELL hervorhebt, beruht dies wahrscheinlich darauf, dass das Wasser im Holz bei  $0^{\circ}$  aus den Zellen und deren Membranen ausfriert. Diese werden also nach dem Gefrieren wasserärmer und schrumpfen daher zusammen. Wahrscheinlich setzt demnach eben beim Gefrierpunkt eine kräftigere Durchmesserabnahme als vorher ein. Diese Auffassung scheint in der Tat durch LÖF's Ziffern eine Bestätigung zu finden. Solange man sich jedoch in dem Temperaturgebiet oberhalb  $0^{\circ}$  bewegt, dürfte man nur mit dem linearen Ausdehnungskoeffizienten zu rechnen haben.

Da Kluppierungen zu wissenschaftlichen Zwecken der Regel nach während des Sommerhalbjahres vor sich gehen, kann man voraussetzen, dass die allergrösste Temperaturdifferenz, die in Frage kommen kann,  $25^{\circ}$  ist, welcher Betrag wohl auch für den Fall ausreicht, dass die Stämme durch direkte Sonnenbestrahlung etwas erwärmt sind.

Für einen solchen Temperaturunterschied ändert sich der Durchmesser bei einem Baume von:

10 cm Durchmesser	um	0,13 mm,
20 »	»	0,25 »
30 »	»	0,38 »
40 »	»	0,50 »

Der prozentuelle Fehler ist  $= 0,00005 \times 100 \times 25 = 0,125$  %. Da die prozentuelle Grundflächenänderung ungefähr doppelt so gross ist wie die Durchmesseränderung, so ist also erstere  $= 0,250$  % (der ursprünglichen Grundfläche).

Diese Ziffer ist offenbar eine Höchstziffer. In Wirklichkeit beträgt natürlich der Temperaturunterschied zwischen zwei Kluppierungen nur äusserst selten  $25^{\circ}$ . Die Hälfte reicht in der Regel zu; man würde mithin mit Sicherheit einen Temperaturfehler von etwa 0,125 % riskieren können, wenn die Temperaturunterschiede zwischen den Kluppierungen vernachlässigt werden.

Sind die Stämme bei einer der beiden Kluppierungen gefroren, so kann jedoch dieser Fehler beträchtlich grösser ausfallen, auch wenn der Temperaturunterschied nicht den Betrag übersteigt, mit dem wir soeben gerechnet haben ( $12^{\circ},5$ ).

\*       \*       \*

Es ist seit lange bekannt, dass die Dicke der Bäume tagesperiodischen Änderungen unterworfen ist. PAUL KAISER beschrieb (1879) den Verlauf derselben. Auch G. KRAUSS beobachtete diese Tagesperiode (1879, 1896). JOSEF FRIEDRICH (1897) hat eingehend das eigentümliche Verhältnis studiert, und in neuerer Zeit sind sehr interessante Untersuchungen hierüber von D. T. MAC DOUGAL (1919, 1921, 1924) und H. NAKASHIMA (1924) ausgeführt worden.

In diesem Aufsatz können wir nur eine kurze Übersicht über die interessante Frage liefern und stützen uns dabei der Hauptsache nach auf FRIEDRICH's Arbeit. MAC DOUGAL's weitläufige und mehr detaillierte Arbeiten haben Resultate ergeben, die, gleich denen NAKASHIMA's, in allem Wesentlichen mit denen FRIEDRICH's in Übereinstimmung stehen.

Der Verfasser erhielt durch feine selbstregistrierende Apparate schöne Kurven über die Schwankungen des Baumumfangs (vgl. Fig. 1). Früh am Morgen sind die Dimensionen am grössten, sie sinken dann rasch, erreichen ihr Minimum am Nachmittag und steigen danach allmählich wieder bis zum Morgen. Der Zeitpunkt des Eintritts des Maximums und des Minimums ändert sich je nach Jahreszeit und Witterung. Für verschiedene Bäume und Baumarten verlaufen indessen die Kurven ziemlich parallel. Dieses eigentümliche Verhalten erklärt sich durch den Einfluss der Witterung auf die Transpiration. Um dies zu verstehen, stellen wir uns für einen Augenblick auf den Standpunkt der sog. Kohäsionstheorie. Der Inhalt dieser Theorie wird als der Hauptsache nach dem Leser bekannt vorausgesetzt. Am Morgen, wenn die Sonne aufgeht und die Wärme zunimmt, beginnt durch die Spaltöffnungen, die sich dann öffnen, eine Wasserabgabe von den Blättern her. Das weggegangene Wasser wird aus nach innen zu liegenden Zellen ersetzt, die also ihrerseits wasserärmer werden und Kompensation von noch weiter einwärts liegenden Geweben suchen. Allmählich erreicht dieses »Saugen« die Leitungsbahnen in Zweigen und Stamm und pflanzt sich bis zu den Wurzeln hinab fort. Dort wird nun die Wasseraufnahme bewirkt. Sowohl diese wie auch der weitere Hinauftransport des Wassers geschieht unter Überwindung starker Widerstände. Hieraus folgt, dass die Flüssigkeit in dem Stamm sich in einer Art Spannungszustand befindet. Die Schrumpfung des Durchmessers des Baumes darf indessen nicht als ein Resultat der

Spannung selbst aufgefasst werden, es handelt sich also nicht um eine elastische Zusammenziehung des Holzes, sondern die Ursache des Schrumpfens ist in der Abnahme des Wassergehalts zu erblicken, die deswegen eintritt, weil das Wasser infolge der grossen Widerstände im Stamme nicht mit derselben Geschwindigkeit ersetzt zu werden vermag, wie die Abgabe geschieht. Nach und nach wird wohl unter günstigen Wasseraufnahmebedingungen ein Gleichgewicht zwischen Abgabe und Aufnahme erreicht, ist aber das Gleichgewicht etabliert, so arbeitet der ganze Baumorganismus mit einem niedrigeren Wassergehalt und in einem höheren Spannungszustand. Es ist auch FRIEDRICH gelungen, diejenigen

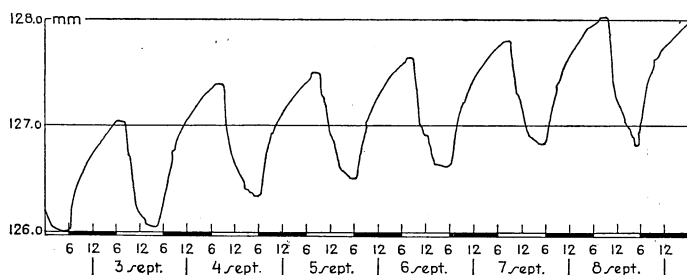


Fig. 1. Beispiel der täglichen Umfangsvariationen einer Fichte, nach FRIEDRICH.

Exempel på de dagliga omkretsvariationerna hos en gran, efter FRIEDRICH.

Änderungen des Wassergehalts des Holzes festzustellen, die durch die Transpiration verursacht werden. Wir können uns demnach den Verlauf ungefähr folgendermassen vorstellen.<sup>1</sup>

Am Morgen, wenn die Transpiration beginnt, verlieren die Leitungsbahnen und die Zellen naheliegender Gewebe Wasser und ziehen sich hierbei durch das Austrocknen zusammen. Bei abnehmenden Licht, steigender Luftfeuchtigkeit und sinkender Temperatur nimmt die Transpiration am Nachmittag ab, die Zellen der Leitungsbahnen füllen sich allmählich wieder mit Wasser, ihre Membranen schwellen, und die Dimensionen des Stammes nehmen zu. Schliesslich hört die Transpiration so gut wie vollständig auf, als eine Nachwirkung dauert jedoch der Prozess der Wasseraufnahme noch lange fort, bis zuletzt auch er aufhört. Dann hat der Durchmesser des Stammes seinen Höchstwert erreicht, dieser bleibt jedoch nur kurze Zeit bestehen, bis aufs neue mit dem Sonnenaufgang die Transpiration des nächsten Tages wieder beginnt.

Die Grösse der Durchmesseränderungen erreicht nach FRIEDRICH bisweilen bedeutende Werte. Bei zwei Fichten von 31 bzw. 40 cm Brust-

<sup>1</sup> Wahrscheinlich können diese Verhältnisse auch von vitalistisch betontem Gesichtspunkte aus erklärt werden.



höhendurchmesser sind die grössten beobachteten Durchmesseränderungen 0,40 bzw. 0,55 mm. Nach MAC DOUGAL (1919) kann die Durchmesseränderung bei *Fraxinus Arizonica* (32 cm Durchmesser) Anfang Mai 1,6 mm betragen, während der regnerischen Hochsommerperiode überschreitet sie jedoch nicht 0,3 mm. Bei *Pinus radiata* (42 cm Durchmesser) beträgt die Änderung im Juni 0,7—0,8 mm, im August 0,4 mm.

In Fig. 2 sind aus FRIEDRICH's Messungsmaterial berechnete Monatsdurchschnitte für die täglichen Umfangsänderungen von 7—8 Uhr bis 14 Uhr graphisch veranschaulicht worden. Die Umfangsänderung, die auf der  $y$ -Achse abgetragen worden ist, ist = dem Unterschied zwischen

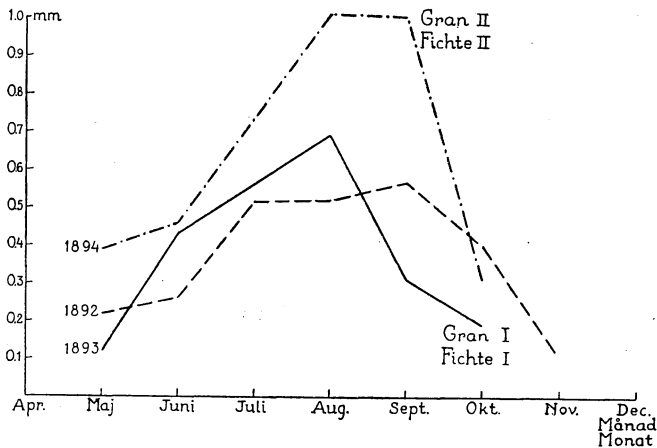


Fig. 2. Monatsmittel der täglichen Umfangsvariationen, nach FRIEDRICH.  
Månadsmedeltal av de dagliga omkretsändringarna, efter FRIEDRICH.

der Ablesung um 7—8 Uhr und der Ablesung am selben Tage um 14 Uhr. Hieraus lässt sich berechnen, dass die grösste Durchmesseränderung während dieser Periode im Mittel für einen ganzen Monat 0,32 mm (Fichte II, 40 cm Durchmesser) bzw. 0,22 mm (Fichte I, 31 cm Durchmesser) beträgt. Die Grundflächenänderung kann also auf 0,16 bzw. 0,14 % geschätzt werden.<sup>1</sup> Diese Ziffern stellen nun Durchschnittswerte dar, die natürlich an gewissen Tagen bedeutend überschritten werden können. Die maximalen Grundflächenänderungen belaufen sich auf 0,28 bzw. 0,26 % für die beiden Fichten.<sup>1</sup>

Wie oben erwähnt, hängt die Durchmesseränderung mit der Wasserbilanz des Baumes zusammen. Die Transpiration senkt den Wassergehalt des Stammes, und die Folge davon ist eine Abnahme des Durchmessers. Es ist daher wahrscheinlich, dass jede Wassergehaltsschwankung

<sup>1</sup> Diese Ziffern stellen zugleich ungefähr den grössten Tagesunterschied dar.

von einer entsprechenden Durchmesserchwankung begleitet wird. Da nun jedoch, wie u. a. HARTIG (1892) gezeigt hat, der Wassergehalt des Baumstamms bedeutende Veränderungen mit der Jahreszeit erfährt (Fig. 3 und 4), so ist es wahrscheinlich, dass auch der Durchmesser eine derartige jahreszeitliche Variation aufweist. Wie gross diese sein kann,

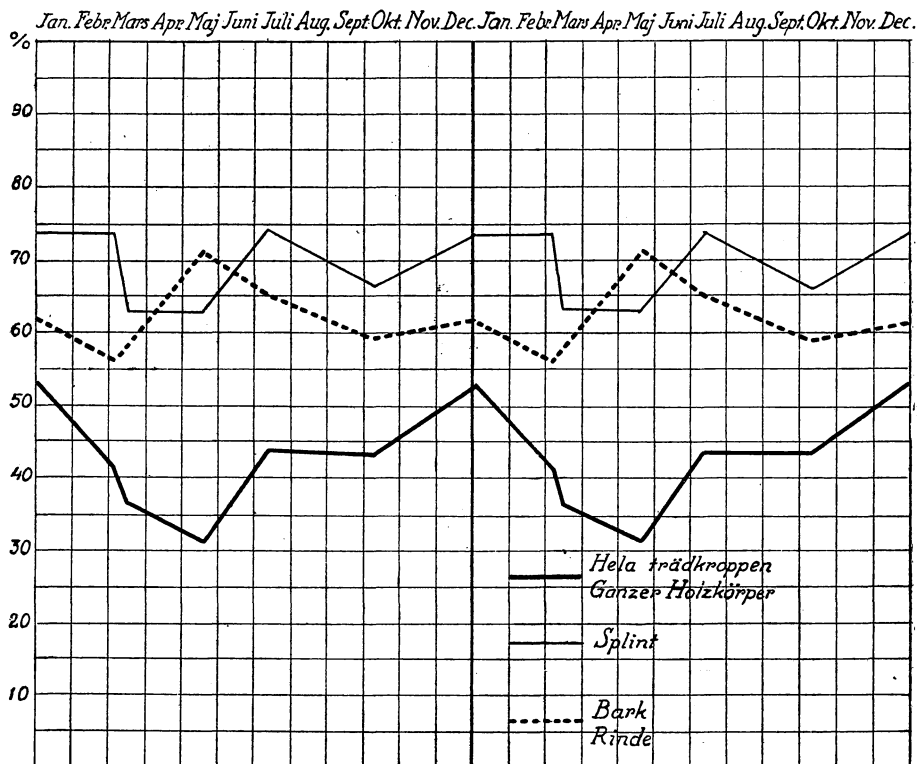


Fig. 3. Die Jahresperiode des Wassergehalts, Kiefer, nach HARTIG.

Vattenhaltens årsperiod hos tall, efter HARTIG.

ist so gut wie unmöglich zu sagen. Indessen ist wohl die Annahme erlaubt, dass sie wenigstens das ihrige dazu beiträgt, dass die zuvor geschätzten Änderungen nicht zu hoch beurteilt worden sind.

Es ist sehr wahrscheinlich, dass die Dimensionsänderungen, die durch die Temperatur und die Transpiration bedingt sind, in gewissem Grade zusammenhängen. Denn wenn auch die Öffnung der Spaltöffnungen hauptsächlich durch das Licht geregelt wird (STÅLFELT, 1928), so muss doch die Lufttemperatur für die durch sie vor sich gehende Wasserabgabe eine Rolle spielen. Dieses Zusammenspiel können wir jedoch nicht rechnerisch in seine Faktoren auflösen, sondern müssen in jedem Einzelfall

erwägen, welche Ziffern wir in Rechnung zu ziehen haben, und wir müssen sie eben so richtig zu wählen versuchen, wie unsere mangelhaften Kenntnisse es zulassen.

Fassen wir nun die Einwirkung der Temperatur und der Transpiration auf die Grundflächenbestimmungen zusammen, so finden wir, dass die

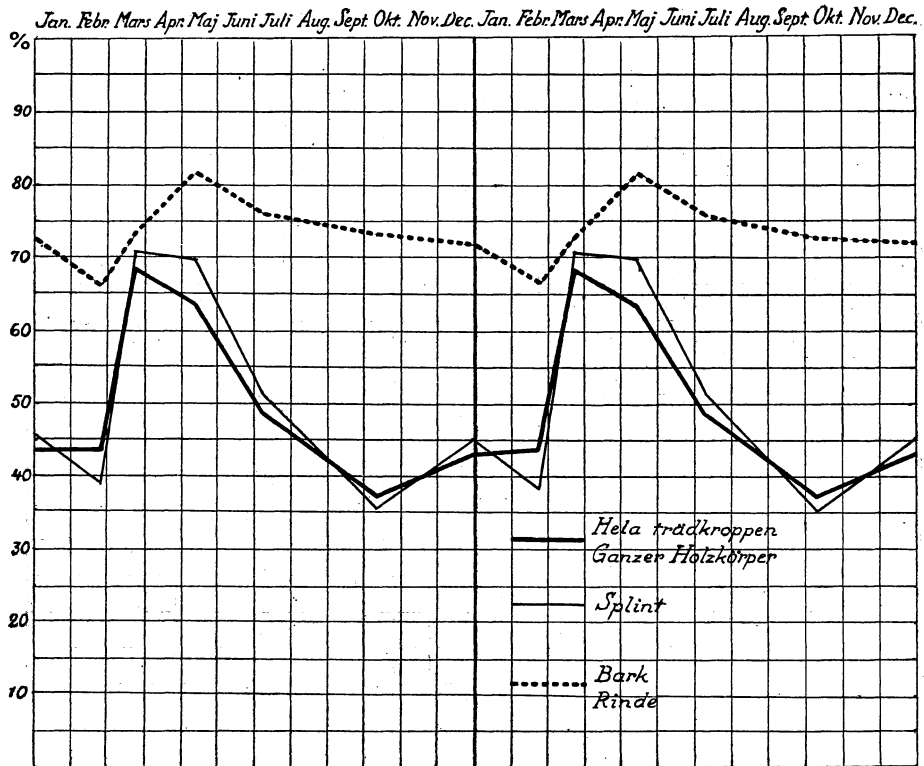


Fig. 4. Die Jahresperiode des Wassergehalts, Birke, nach HARTIG.

Vattenhaltens årsperiod hos björk, efter HARTIG.

Grundfläche, als eine selbständige und freistehende Grösse betrachtet, nur unbedeutend beeinflusst wird, dass dagegen die Differenz zwischen zwei Grundflächenbestimmungen einen merkbaren Einfluss erfahren kann.

Wenn z. B. eine Grundfläche zuerst um 14—15 Uhr Anfang Mai bei  $+5^{\circ}$  Temperatur und im nächsten Jahre früh morgens um 7—8 Uhr Mitte August bei  $+17^{\circ},5$  Temperatur kluppiert wird, so wird, wenn die Grundfläche der Probefläche normal um 3 % jährlich zunimmt, der zweijährige Zuwachs um rund 4,9 % überschätzt. Dieser Fehler kann unter besonders ungünstigen Verhältnissen möglicherweise auf za. 9,4 %

steigen. In der Regel sind jedoch die Zuwachsperioden länger als zwei Jahre, z. B. oft 5 Jahre, und die prozentuellen Fehler werden dadurch in entsprechendem Grade niedriger, nämlich 2,0 bzw. 3,8 % des gesamten Grundflächenzuwachses während der Periode. Schon 2,0 % auf 5 Jahre, also 0,4 % pro Jahr, ist jedoch ein Betrag, der eine gewisse Aufmerksamkeit verlangt.

Die Berechnung der Prozente ist folgendermassen geschehen. Die Grundfläche zu Beginn der Periode, um  $\frac{7 \text{ bis } 8 + 14 \text{ bis } 15 \text{ Uhr}}{2} = 10^{30}$  bis  $11^{30}$  Uhr, und bei einer Temperatur von  $\frac{5 + 17,5}{2} = 11^{\circ},25$  ist als normal und  $= g_1$  angenommen. Die Grundfläche zu Ende der Periode genau um die gleiche Zeit und bei derselben Temperatur  $= g_2$ .

Die geschätzte Grundfläche zu Beginn der Periode ist nun  $0,9992 \cdot 0,999375 g_1$  und zu Ende der Periode  $1,0008 \cdot 1,000625 g_2$ . (Für einen Temperaturunterschied von  $12^{\circ},5$  wird der oben angeführte Wert des Grundflächenfehlers  $= 0,125$  % und für den Zeitunterschied 7—8 Uhr bis 14—15 Uhr der Grundflächenfehler 0,16 % angenommen, diese beiden Fehler werden als approximativ proportional dem Temperaturfall bzw. dem Zeitunterschied angenommen). Ist nun  $g_2 = 1,06 g_1$ , so erhält man 
$$\frac{100 (1,001426 \cdot 1,06 g_1 - 0,998576 g_1 - 0,06 g_1)}{0,06 g_1} = \text{den prozentuellen}$$

Fehler des Zuwachses  $= 4,9$ .

Wenn man sich stattdessen entschliesst, den Grundflächenwert 14—15 Uhr bei der Temperatur  $17^{\circ},5$  als normal anzunehmen, so gestaltet sich die Berechnung folgendermassen: 
$$\frac{g_2 - 1,0016 \cdot 1,00125 g_1 - 0,06 g_1}{0,06 g_1} = 4,8 \text{ \%}.$$

Wichtiger vielleicht als die bisher erwähnten Grundflächenschwankungen ist der jährliche Grundflächenzuwachs. Bei Kubikmassenermittlungen für wissenschaftliche Zwecke handelt es sich ja meistens darum, den periodischen laufenden Zuwachs als den Unterschied zwischen zwei durch eine gewisse Zeitperiode geschiedenen Ermittlungen zu berechnen. Die gewöhnliche Periode ist 5 Jahre, es können aber sowohl längere als kürzere vorkommen. Es ist ziemlich klar, dass man bei Grundflächenbestimmungen für die fraglichen Zwecke der Jahreszeit, in welcher sie ausgeführt werden, Beachtung schenken muss. Wenn z. B. die erste Klupierung auf einer Probefläche im Herbst 1920 und die zweite im Frühling 1925 gemacht wird, so liegen ja zwischen diesen beiden Zeitpunkten nur vier Vegetationsperioden, während nach ganzen Kalenderjahren gerechnet fünf Jahre von der ersten bis zur zweiten Ermittlung verflossen

sind. Es ist folglich notwendig, Kenntnis von dem Datum der einzelnen Ermittlungen zu besitzen, um ihren Unterschied pro Jahr richtig berechnen zu können.

Sollte die erste Ermittlung mitten in der Zuwachsperiode, z. B. Anfang Juli, geschehen sein, so muss selbstverständlich auch die zweite Ermittlung Anfang Juli vorgenommen werden, da sonst ein schwerbestimmbarer Teil eines Jahreszuwachses in den Gesamtzuwachs während der Periode eingehen würde. Indessen ist die Sache, wie sich weiter unten ergeben wird, damit keineswegs erledigt.

Völlige Sicherheit dafür, dass die Differenz zwischen zwei Kluppierungen den Zuwachs einer bestimmten Anzahl ganzer Jahre ergeben soll, was als äusserst erwünscht betrachtet werden muss, erreicht man in Wirklichkeit erst dann, wenn die beiden Kluppierungen entweder vor oder nach der Vegetationsperiode ausgeführt werden. Die Möglichkeit, die Bestandesermittlungen auf diese sicherstellende Weise anzuordnen, hängt von dem Zeitpunkt des Anfanges und Endes der Zuwachsperiode ab. Dieser Zeitpunkt hängt wiederum von Klima, Standort, Exposition usw. und ausserdem in wesentlichem Grade von den rein lokalen Verhältnissen in der Umgebung der einzelnen Bäume ab. Es ist daher unmöglich, einen bestimmten Zeitpunkt für Anfang und Ende des Zuwachsprozesses anzugeben. In Schweden hat ROMELL diese Frage näher untersucht. Er fand z. B., dass der Durchmesserzuwachs im Mittel für 4 verschiedene Kiefernflächen (in Hoting, Västernorrland) bzw. am 21. V. 1921, 6. VI. 1922 und 26. VI. 1923 begann (zu diesen Zeitpunkten hatten 5 % des Gesamtzuwachses sich bereits abgesetzt). Der Durchmesserzuwachs endete (d. h. 95 % des Gesamtzuwachses waren vollendet) bzw. am 2. IX, 24. VIII. und 17. VIII. Das Ende der Zuwachsperiode scheint also etwas konstanter zu sein als ihr Anfang.

Die Zuwachsperiode erstreckt sich folglich über eine Zeit von weniger als zwei Monaten bis mehr als drei Monate. Ein bedeutender Teil des Sommerhalbjahres ist somit ungeeignet für wissenschaftliche Grundflächenbestimmungen vom Gesichtspunkt der Zuwachsberechnung aus. Dass der Winter eine ungeeignete Zeit ist, versteht sich von selbst. Ferner ist es klar, dass verschiedene Jahre so verschieden betreffs des Ganges des Zuwachses sein können, dass es keine Gewähr für richtige Zuwachsergebnisse in sich schliesst, wenn die Ermittlungen auf bestimmte Monatsdaten festgelegt werden.

Folglich bleibt nichts anderes übrig, als die Probeflächenbehandlungen auf den Frühling und den Herbst zu konzentrieren. Bei Frühlingsabschätzungen muss man die beginnende Sprosstreckung beachten. Diese tritt der Regel nach etwas früher als der Durchmesserzuwachs

ein und kann daher als ein *Memento* dienen. Gilt es Massenermittlungen, so wirkt ja auch die Höhe auf das Resultat ein, und es kann daher notwendig sein, die Probeflächenarbeit schon bei Beginn der Sprosstreckung abzuschliessen oder wenigstens die Höhen auf eine den Verhältnissen angepasste Weise zu bestimmen. Das Ende der Zuwachsperiode ist bedeutend schwieriger zu bestimmen. In dieser Beziehung lässt sich nur sagen, dass nach ROMELL's Untersuchungen der Durchmesserzuwachs in unserem Lande in keinem untersuchten Falle in den September hinein fortgedauert hat, und dass er wahrscheinlich der Regel nach um den 20. August herum abgeschlossen ist. Zu diesem Zeitpunkt ist man daher in der Regel unverhindert, die Herbstabschätzungen zu beginnen.

Vorsichtsmassregeln der hier erwähnten Art sind um so notwendiger, je kürzer die Zeitperiode ist, für die man eine Angabe über den laufenden Zuwachs wünscht. Der Zuwachs während langer Perioden ist weniger empfindlich für die hier diskutierten Abweichungen, ganz besonders wenn man sich von Anfang an darüber klar ist, dass die Werte desselben bei der endgültigen Bearbeitung ausgeglichen werden sollen. Andererseits aber können sichere Angaben und Schlüsse aus um so kürzeren Entwicklungsverläufen gezogen werden, je sicherer die Messungen sind, und je mehr Sorgfalt man den hier erwähnten Verhältnissen gewidmet hat. Es ist demnach in jedem Einzelfalle darüber zu entscheiden, ob einem Versuchszweck besser gedient ist mit längeren Perioden und geringerer Sorgfalt oder mit kürzeren Perioden und grösserer Sorgfalt.

## II. Verschiedene Methoden zur Messung und Berechnung der Grundfläche.

Die Grundflächenmessung ist oft behandelt worden, vorzugsweise in der älteren deutschen Literatur. Es erscheint jedoch zweckmässig, hier die wichtigsten Resultate auf diesem Gebiet kurz zu rekapitulieren und diese in gewissen Hinsichten zu ergänzen. In der vorliegenden Untersuchung beschäftigen wir uns ausschliesslich mit der Grundflächenbestimmung einschliesslich Rinde.<sup>1</sup> Die Rindenbestimmung nach gewissen gebräuchlichen Methoden schliesst zwar Fehlerquellen in sich, das Studium derselben aber sei einer späteren Untersuchung vorbehalten. Ziemlich wohldefiniert ist die Grundfläche überhaupt nur ohne Rinde, und daher ist die Bestimmung der Grundfläche ohne Rinde von grösster Bedeutung. Im allgemeinen kann ja, wie leicht einzusehen ist, diese Grundfläche nur selten direkt gemessen werden.

<sup>1</sup> Natürlich gelten einige der Resultate auch ohne weiteres für Grundflächen ohne Rinde.

Wir gehen nicht auf die graphischen Methoden der Grundflächenberechnung ein, da diese nur ausnahmsweise vorkommen können (siehe hierüber u. a. SCHMIDTBORN 1863 und MÜLLER 1915). Zu betonen ist nur, dass man oft die Grösse einer Grundfläche sehr genau dadurch bestimmen kann, dass man sie auf einem Papier abpaust und die von der Peripherielinie eingeschlossene Fläche mittels der SIMPSON'schen Regel, Planimetrierung oder durch Ausschneiden und Wägen der Papierfiguren berechnet. Ob der so erhaltene Grundflächenwert stets als das Normalmass für Grundflächenberechnungen zu betrachten ist, dürfte diskutabel sein. Für den praktischen Gebrauch ist die Methode natürlich ungeeignet, denn sie kann nur angewandt werden, wenn die Bäume umgesägt werden. Der Wert, den die Normmethode ergibt, bleibt aus diesem Grunde der Regel nach unbekannt. Nur durch Feststellung von Relationszahlen auf Grund eines grossen Materials kann sie zu einem Teile ausgenutzt werden. Ausserdem dürfte die Methode bei Messung gewisser Baumarten mit Rinde ziemlich schlecht definierte und von Zufälligkeiten abhängige Resultate liefern. Wie gross also die wirkliche, die wahre,<sup>1</sup> Grundfläche ist, das bleibt so gut wie immer unbekannt.

Ausser dieser Methode gibt es noch zwei weitere Methoden zur Bestimmung der Grundfläche. Früher wurden die Grundflächen oft nach Messung des Umfanges des Baumes berechnet, in neuerer Zeit dagegen meistens nach Messung eines oder mehrerer Durchmesser. Es will scheinen, als wenn SMALIAN der erste gewesen ist, der die Kluppe als dem Massband überlegen empfohlen hat (1837, siehe GRUNDNER 1882).

Bei Messung einer Grundfläche nach diesen Methoden entstehen Fehler, deren Grösse teils von der Messmethode und teils von der darauf folgenden Berechnungsmethode abhängt. Diese Fehler sind ihrem Charakter nach systematisch. Kennt man die angewandten Methoden, so muss man daher Korrekturen anbringen können, die die fehlerhafte Grundfläche auf ihren richtigen Wert reduzieren. Ausser den systematischen Fehlern treten auch zufällige Fehler auf, die in einem späteren Kapitel behandelt werden sollen. Die systematischen Fehler sind in der Regel nicht bedeutungslos für wissenschaftliche, auf weite Sicht gestellte Untersuchungen, da sie, wie weiter unten gezeigt werden wird, in Form von Multiplikationsfaktoren auftreten und daher auf die gesuchten Zuwachsbeträge einwirken.

---

<sup>1</sup> Hier ist die Bedeutung dieser Worte absolut zu nehmen. Später (z. B. S. 250) werden sie auch in Zusammenhang mit gewissen speziellen Mess- oder Berechnungsmethoden angewandt.

## Durchmessermessung.

### Kreis.

Wäre der Querschnitt des Baumstammes ganz einfach als eine Kreisfläche zu betrachten, so wäre es sehr leicht, aus einer einzigen Durchmessermessung den Flächeninhalt zu berechnen. Man erhält nämlich, wie bekannt, eine Kreisfläche nach der Formel:

$$Y = \frac{\pi}{4} D^2 = 0,785398 D^2 \dots\dots\dots (I)$$

wo  $Y$  = die Fläche und  $D$  = der Durchmesser.

Meistens ist die Sache jedoch nicht völlig so einfach. Schon früh (siehe GRUNDNER 1882, SCHWARZ 1899) bemerkte man, dass die Stämme der Bäume oft einen grössten und einen kleinsten Durchmesser hatten. Diese »Exzentrizität« hat man auf die verschiedensten Weisen zu erklären versucht (GRUNDNER 1882, SCHWARZ 1899, MÜLLER 1915, ENGLER 1918), sogar die Umdrehung der Erde ist mit herangezogen worden. Man dürfte der Wahrheit am nächsten kommen, wenn man sagt, dass die »Exzentrizität« im allgemeinen auf eine grosse Menge verschiedener Ursachen zurückgeht, die in gewisser Ausdehnung unabhängig voneinander sind (vgl. S. 243). Wenn alle diese Ursachen ausserdem eine untereinander vergleichbare Wirkungsintensität hätten, was in Wirklichkeit wahrscheinlich selten ist, so müsste die »Exzentrizität« in einem Bestande sich nach einer gewissen Frequenzkurve verteilen. Diese ist jedoch nicht von dem gewöhnlichen GAUSS'schen Typus, sondern von dem Typus, den CHARLIER (1905, 1906, 1913, 1920) als B-Typus bezeichnet. Dieser entsteht meistens, wenn das Attribut, in diesem Falle die »Exzentrizität«, bei einem seiner Werte diskontinuierlich begrenzt ist. Dass dies betreffs der »Exzentrizität« der Bäume der Fall ist, ist leicht ersichtlich, da diese ja alle Werte  $\leq 1$ , nicht aber die Werte  $> 1$  annehmen kann. Leider steht kein so grosses Material zur Verfügung, dass eine auf die Ursachen gehende Untersuchung über die »Exzentrizität« mit Hilfe statistischer Methoden hier ausgeführt werden kann. Dass die »Exzentrizität« ( $\beta$ ), gemessen als das Verhältnis zwischen dem kleinsten und dem grössten Durchmesser des Baumes, nach einer normalen Frequenzverteilung von B-Typus hin tendiert, geht jedoch aus Fig. 5 hervor, die die Frequenzverteilung von  $\beta$  in einem Kiefernbestande auf ebenem Boden zeigt. Die Übereinstimmung mit der Normalkurve ist jedoch nichts weniger als gut, besser wird sie durch Berücksichtigung noch einer Charakteristika (der Exzentrizität), was darauf hindeutet, dass Störungen des normalen  $\beta$ -Komplexes vorhanden sind. Noch deutlicher tritt dies in Fig. 6 hervor, die die Frequenzverteilung in einem Fichtenbestande mit stark einseitig ex-



ponierter Lage zeigt. In dem Kiefernbestande (Fig. 5) erweist sich  $\beta$  als ziemlich konstant im Verhältnis zum Durchmesser (Fig. 7), während dagegen in dem Fichtenbestande mit der exponierten Lage  $\beta$  mit dem

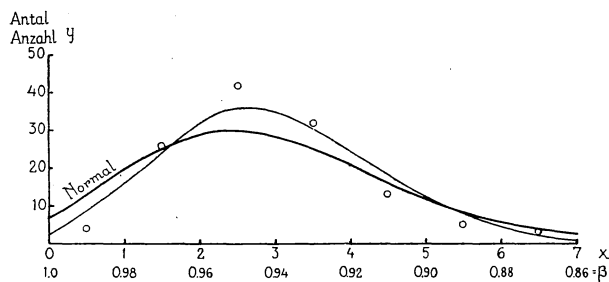


Fig. 5. Die Verteilung der Stammanzahl über das Achsenverhältnis  $\beta$ , Kiefer. Ein Beispiel.

Stamantalets fördelning över axelförhållandet  $\beta$ , tall. Ett exempel.

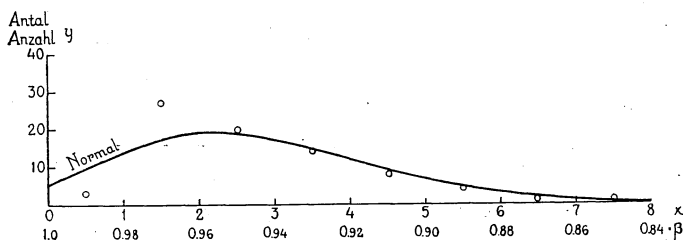


Fig. 6. Die Verteilung der Stammanzahl über das Achsenverhältnis  $\beta$ , Fichte. Ein Beispiel.

Stamantalets fördelning över axelförhållandet  $\beta$ , gran. Ett exempel.

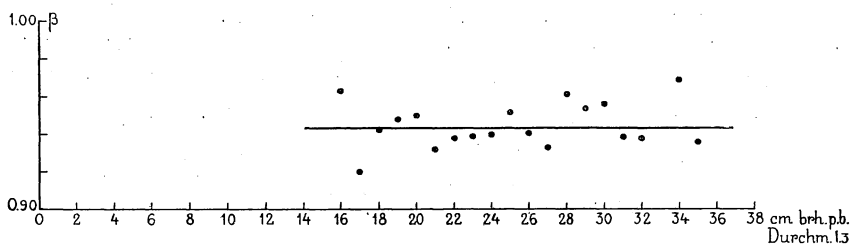


Fig. 7. Das Achsenverhältnis in Beziehung zum Brusthöhendurchmesser. Kiefer.

Axelförhållandet i relation till brösthöjdsdiameteren, tall.

Durchmesser sinkt (Fig. 8), damit andeutend, dass starke Dimensionen ein kleineres Achsenverhältnis haben. Wahrscheinlich kann man einseitige Windeinwirkung hierfür verantwortlich machen (vgl. unten). Ob man praktisch mit konstantem  $\beta$ -Wert rechnen kann, muss folglich von Fall zu Fall entschieden werden.

Um eine Vorstellung davon zu erhalten, wie  $\beta$  im allgemeinen sich verhält, ist das Achsenverhältnis an fünf Kiefernflächen, ausser den eben genannten Kiefern- und Fichtenflächen, gemessen worden. Die  $\beta$ -Punkte in Fig. 9 sind hier als arithmetische Mittel in Grundflächenklassen mit einer Weite von 0,01 m<sup>2</sup> berechnet worden. Es zeigt sich, dass, was die Kiefer betrifft, keine Tendenz zu sinkendem  $\beta$  mit steigendem Durchmesser verspürt werden kann. Bezüglich dieser Baumart muss man daher, wenn man nicht weiss, dass der Bestand besonders exponiert ist, mit einem für alle Durchmesserklassen konstanten Mittelwert von  $\beta$  rechnen können. Der Durchschnittswert von  $\beta$  für 7 Kiefernflächen ist 0,925. Der grösste Wert ist 0,944 und der kleinste 0,907.

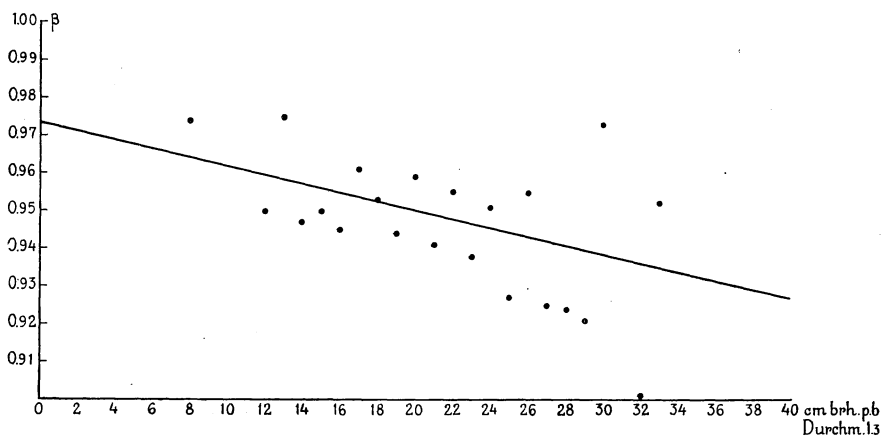


Fig. 8. Das Achsenverhältnis in Beziehung zum Brusthöhendurchmesser, Fichte. Exponierter Standort.

Axelförhållandet i relation till brösthöjdsdiametern, gran, exponerat läge.

Wenn auch eine Grundfläche einen bekannten  $\beta$ -Wert hat, ist doch ihre Form nicht lediglich dadurch bestimmt. Es hat sich gezeigt, und man kann sich sehr leicht davon überzeugen, dass die Peripherielinie einer Grundfläche die verschiedenartigsten Formen aufweisen kann, je nach Baumart, Höhe der Grundfläche über dem Boden, Exposition, Standort, mechanischen Beanspruchungen, Licht- und Ernährungsverhältnissen, Beschaffenheit der Rinde, Ausbildung des Wurzelanlaufs u. a. m. In vielen Fällen ist es jedoch als eine gute Approximation angesehen worden, die Grundflächen als Ellipsen zu betrachten (TISCHENDORF 1927). In SCHMIDT-BORN's (1863) Untersuchungen ergab z. B. eine Berechnung der Grundflächen als Ellipsen einen engeren Anschluss als irgend eine andere Methode an eine Berechnung nach der SIMPSON'schen Regel. Gleichwohl kann man sich leicht davon überzeugen, dass die Grundflächen bei weitem

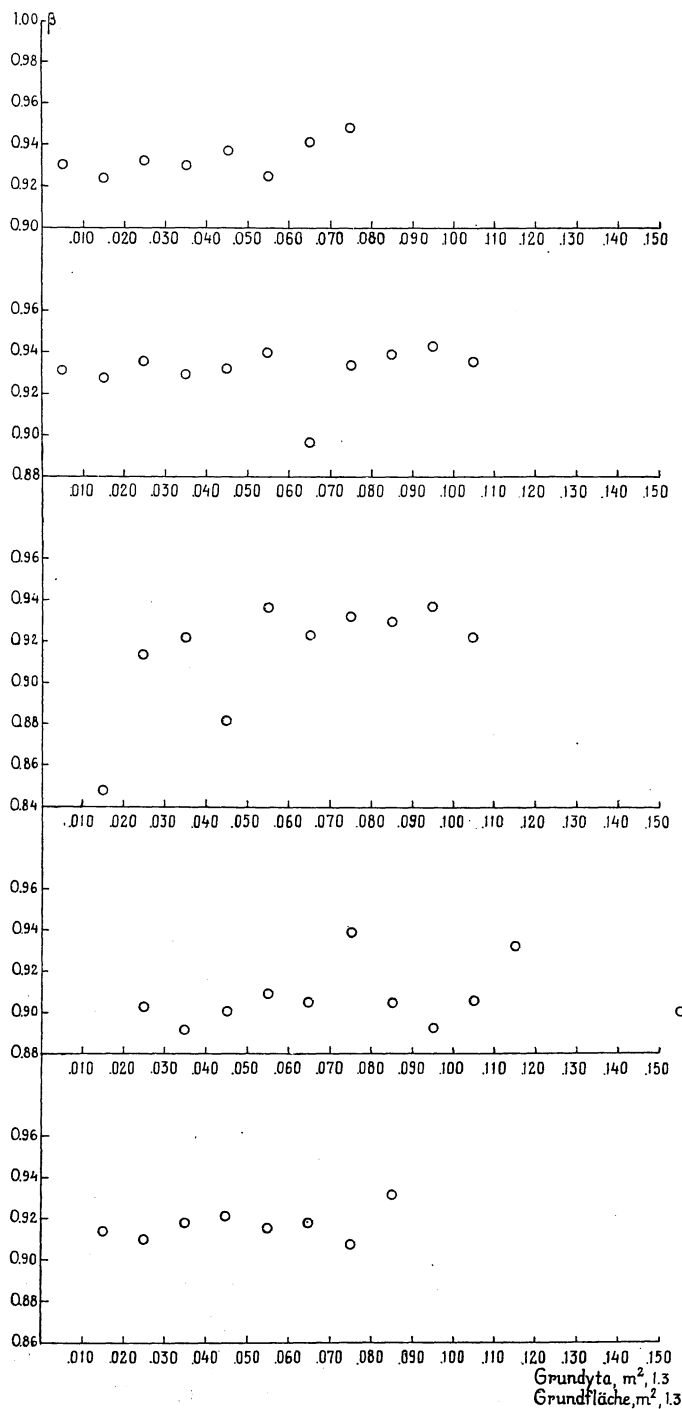


Fig. 9. Das Achsenverhältnis in Beziehung zur Brusthöhengrundfläche, Kiefer.

Axelförhållandet i relation till brösthöjdsgrundytan, tall.

nicht immer ellipsenförmig sind. Sehr oft zeigen sie ihrer allgemeinen Natur nach eine bessere, wenn auch nicht vollständige Übereinstimmung mit Ovalen, d. h. eiförmigen Flächen. Es gibt jedoch mehrere verschiedene Ovaltypen, und es gilt daher zu entscheiden, welcher Typ in Betracht zu kommen hat. Am einfachsten würde dies wohl dadurch geschehen, dass man ein zweckmässig gewähltes Material studiert, aber, wie leicht verständlich, ist es mit bedeutenden Schwierigkeiten verbunden, ein solches zu beschaffen. Von Interesse in diesem Zusammenhang ist ja zunächst die Form der Grundfläche bei Brusthöhe, und nur in Ausnahmefällen kann ein Sägeschnitt dort gelegt werden. Die extremen Grundflächenformen, die bei einer Untersuchung dieser Art das Studienobjekt bilden sollten, sind auch recht selten. Verf. hat jedoch Gelegenheit gehabt, 10 St. Stammscheiben, 2,0 m vom Stumpf entfernt entnommen, zu untersuchen, und es zeigte sich, dass die Querschnitte jedenfalls nicht Ovale der gewöhnlichen Art waren, die in mathematischer Hinsicht durch eine etwas umgeänderte Ellipsengleichung beschrieben wird. Damit ist jedoch nicht die Frage nach der wirklichen Form des Ovals beantwortet, und sie kann auch nicht endgültig beantwortet werden, bevor ein hinreichendes und repräsentatives Material gesammelt worden ist.

Bis das geschehen ist, sollte man jedoch durch folgende Reflexionen einen Schritt vorwärts kommen können, welche Reflexionen nur dem Zwecke dienen, solange das wirkliche Verhältnis unbekannt ist, eine Wahl zwischen verschiedenen Ovaltypen als Repräsentanten der Form der Grundfläche zu treffen. Wir müssen dabei von allen denjenigen Grundflächenformen absehen, die nur durch gewisse, mehr oder weniger ausgeprägte Unregelmässigkeiten bezüglich der Ausbildung der Rinde und des Holzes verursacht werden, und halten uns nur an die »systematischen« Ovalformen, die frei von offensichtlichen Unregelmässigkeiten auftreten. Unter anderem muss also die Grundfläche als oberhalb des Störungsgebiets des Wurzelanlaufs gelegen und, was dickrindige Baumarten betrifft, als von der Rinde befreit gedacht werden.

Unter solchen Verhältnissen fällt ein grosser Teil der Ursachen fort, auf welche die Ausbildung eines Achsenverhältnisses  $< 1$  zurückgeführt werden kann. Von den übrigbleibenden Ursachen scheinen die Verteilung der mechanischen Spannungen über den Querschnitt und die dadurch hervorgerufenen physiologischen Reize stark dominierend zu sein. Schon sehr früh hatte, wie erwähnt, das Achsenverhältnis der Querschnitte Beachtung gefunden (Literatur bei SCHWARZ, 1899), und die Auffassung von den Ursachen desselben war zunächst in überwiegendem Grade ernährungsphysiologisch betont. Allmählich begann man jedoch den mechanischen Spannungen eine grössere Bedeutung beizumessen.

sen, und diese dürfte nunmehr ziemlich sicher nachgewiesen sein, wenn auch die Frage nicht als endgültig geklärt angesehen werden kann. So fand z. B. KNIGHT (1801), dass der Zuwachs in einer künstlich hergestellten, der Richtung nach fixierten Beugungsebene grösser war als senkrecht dazu. Dieser Versuch, der mit Apfelbäumen gemacht wurde, war der erste, der überhaupt auf dem fraglichen Gebiet ausgeführt worden ist. Eine grosse Menge Beobachtungen an Nadelbäumen (Kiefer und Fichte), die aus der einen oder anderen Ursache von der Senkrechten abweichen, haben gezeigt, dass der Zuwachs auf der der Druckspannung ausgesetzten Seite zunimmt, während die von Zugspannungen beeinflusste Seite keine grösseren Veränderungen erfährt oder auch eine Zuwachsverminderung aufweist, die in gewissen Fällen zu vollständigem Ausbleiben des Zuwachses führen kann (NÖRDLINGER 1872, SCHWARZ 1899, Beobachtungen des Verf.'s u. a.). In neuerer Zeit hat JACCARD (1919) durch Experimente gezeigt, dass der Zuwachs bei verschiedenen Baumarten durch künstlich hervorgebrachte Spannungen beeinflusst wird, und dass speziell die Kiefer eine Zuwachszunahme in der Beugungsebene aufweist, ohne Bildung von Rotholz, aber mit Verdickung der Zellwände. Dass die Abwesenheit mechanischer Beanspruchung einen vermindernden Einfluss auf den Grundflächenzuwachs in gewissen Partien des Stammes ausübt, ist experimentell von KNIGHT nachgewiesen worden, und Verf. hat Beobachtungen gemacht, die dies bestätigen (TIRÉN 1928). Was im besonderen die durch den Wind bei einseitiger Windrichtung verursachten Spannungen betrifft, so liegen eine sehr grosse Menge Beobachtungen vor, die es sehr wahrscheinlich machen, dass diese einseitigen Spannungen den Zuwachs der Druckseite bei Kiefer und Fichte fördern und dadurch ein niedriges Achsenverhältnis bewirken (HARTIG 1896, SCHWARZ 1899, NÖRDLINGER 1882 u. a.). Bei den Laubbäumen sind die Verhältnisse möglicherweise komplizierter, und das Beobachtungsmaterial ist auch nicht so gross. ENGLER (1918) hat gezeigt, dass die Laubbäume im grossen und ganzen auf dieselbe Weise wie die Nadelbäume auf Druckspannungen reagieren, obwohl schwächer, während dagegen der geotropische Reiz bei ihnen einen vermehrten Zuwachs der Oberseite (gleichzeitig oft = der konkaven Seite) auslöst. Bei den Nadelbäumen wird auch in diesem Falle die Unterseite stimuliert. Ganz allgemein stellt ENGLER fest, dass Zugspannungen keine Vermehrung des Dickenzuwachses bei Laubbäumen auslösen.

Auf Grund dieser und vieler anderer Beobachtungen muss es als wahrscheinlich angesehen werden, dass auf verschiedene Weise hervorgerufene einseitige Spannungen ein gesenktes Achsenverhältnis mit sich bringen. Eine wichtige Ursache derartiger einseitiger Spannungen ist der Druck

des Windes auf die Krone. Oft weht der Wind in überwiegendem Grade in einer einigermaßen bestimmten Richtung, die durch die allgemeinen meteorologischen Verhältnisse im Lande sowie durch die örtlichen Verhältnisse bedingt ist, und damit ist eine so gut wie überall vorhandene Ursache zur Abweichung der Grundfläche von der Kreisform gegeben. Wenn wir also bei unseren gewöhnlichen Bestandstypen annehmen, dass die einseitige Druckwirkung des Windes die hauptsächliche Ursache für die elliptische oder ovale Querschnittsform der Stämme ist, ohne dabei

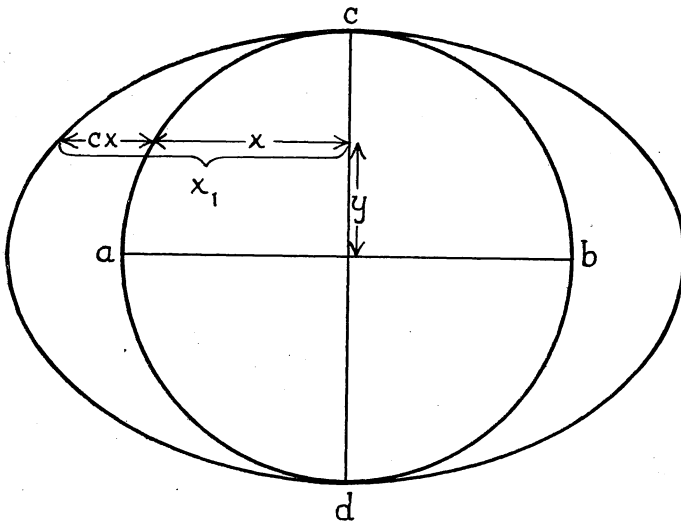


Fig. 10. Zur Diskussion der Ovalität, vgl. Text.

Till diskussionen av ovaliteten, jfr texten.

die grosse Menge Ursachen zu vergessen, die unberücksichtigt geblieben sind, so würde man auf Grund hiervon zeigen können, dass die Querschnitte wahrscheinlich als Ellipsen oder Zusammensetzungen von Ellipsen ausgeformt werden. Man muss da die im übrigen sehr natürliche und auf vielen anderen physiologischen Gebieten gültige Voraussetzung machen, dass die Reaktion der Stärke des Reizes proportional ist. Ist dem so, so muss ein Stamm mit kreisrundem Querschnitt, der überwiegend in einer bestimmten Ebene  $a-b$  (siehe Fig. 10) gebeugt wird, mehr in der Ebene  $a-b$  als in irgend einer anderen und speziell mehr als in der zu  $a-b$  senkrechten Ebene  $c-d$  zuwachsen. Werden die senkrechten Abstände von der neutralen Ebene  $c-d$  zur Peripherie des Kreises  $x$  genannt, so ist indessen die Spannung  $\sigma$  proportional zu  $x$ . Folglich wird der Zuwachs am meisten eben bei  $a$  und  $b$  und am wenigsten, d. h. überhaupt nicht, bei  $c$  und  $d$  stimuliert. Dass infolge hiervon die Form

des Querschnitts aus einem Kreise in eine Ellipse übergeht, ist leicht zu beweisen. Schreibt man die Gleichung des Kreises:  $x^2 + y^2 = r^2$ , so erhält man daraus:  $x = \pm \sqrt{r^2 - y^2}$ . Werden nun die Abstände  $x$  stimuliert, proportional zu sich selbst zuzunehmen, so erhält man die neuen Abstände:  $x_1 = x + cx$ , wo  $c$  = der Proportionalitätsfaktor. Also ist die Gleichung für die neue Peripherielinie:

$$x_1 = \pm \sqrt{r^2 - y^2} \cdot (1 + c), \text{ d. h.:}$$

$$\frac{x_1^2}{r^2 (1 + c)^2} + \frac{y^2}{r^2} = 1$$

oder mit anderen Worten eine Ellipse mit der grossen Achse  $r(1 + c)$  und der kleinen Achse  $r$ . Nichts Wesentliches ändert sich in diesem Verhältnis, wenn ausserdem ein additivradialer Zuwachs hinzugefügt wird. Es steht daher in Übereinstimmung mit der Theorie der Entstehung des Achsenverhältnisses, dass die Querschnitte oft sich der Ellipsenform nähern. Ist nun aber der einseitige Wind die Ursache, so muss man sich denken, dass die Druckspannungen grösser werden auf der dem Winde abgewandten Seite als auf der entgegengesetzten, da das Zurückpendeln des Baumes gegen den Wind nie so gross ausfallen kann wie das Pendeln mit dem Wind. Folglich muss die eine Seite, z. B. die linke in Fig. 10, mehr elliptisch, d. h. eine Ellipse mit grösserer Exzentrizität werden als die rechte, und wenn in extremen Fällen die Spannungen auf der rechten Seite überhaupt keine Zuwachsreaktion zu bewirken vermocht haben, so wird der Querschnitt zusammengesetzt aus einer Halbellipse nach links und einem Halbkreis nach rechts. Es ergibt sich demnach, dass eine gewisse Wahrscheinlichkeit dafür spricht, dass die ovalen Querschnitte am ehesten als Zusammensetzungen von Ellipsen mit verschiedener Exzentrizität betrachtet werden könnten. Dies darf jedoch, wie oben erwähnt, nicht als ein genereller Schluss aufgefasst werden. Im Gegenteil sind wir zu diesem Resultat über eine Menge Reservationen hin gelangt, denen in Wirklichkeit eine viel grössere Bedeutung zukommen kann, als wir es hier angenommen haben.

### Ellipse.

Wir setzen zunächst voraus, dass die Querschnitte gewöhnliche Ellipsen sind, und wir wollen die Grösse einer Grundfläche berechnen durch:

I: eine einzige Durchmessermessung gemäss der Kreisformel (1). Dabei entstehen Fehler, die durch Multiplikation der fehlerhaften Grundfläche mit einem Korrektionsfaktor  $k$  neutralisiert werden sollen. Das Studium der Grösse der Fehler kann demnach an dem Korrektionsfaktor

vorgenommen werden. Für die einzelne Grundfläche kann der Fehler ohne weitere Approximationen erhalten werden.

Handelt es sich aber um ganze Bestände, wo nicht jeder Baum für sich berechnet werden kann, so müssen noch zwei oder drei Annahmen gemacht werden, um das Problem nicht allzu kompliziert zu machen, nämlich einmal dass  $\beta$  als konstant wenigstens innerhalb jeder Durchmesserklasse betrachtet werden kann, eine Annahme, die wir als sehr nahe dem wirklichen Verhältnis entsprechend gefunden haben, und ferner auch, dass die Anzahl Bäume in jeder solchen Durchmesserklasse gross ist. Ausserdem müssen wir annehmen, dass die Kluppierung in voraussetzungslos variierenden Richtungen geschieht. Geschieht das nicht und sind die grössten Durchmesser des Bestandes sämtlich annähernd in einer bestimmten Richtung orientiert, was wir als zutreffend anzunehmen Anlass haben, so können offenbar keinerlei Berechnungen über den Fehler angestellt werden, ohne dass eine bestimmte Kluppierungsrichtung fixiert wird. Geschieht dies jedoch, so wird der mittlere Fehler für eine Durchmesserklasse auf den Fehler bei demselben Kluppierungswinkel für eine einzelne Grundfläche (unter der oben erwähnten Voraussetzung von konstantem  $\beta$ ) zurückgeführt. Ist also nichts über den Kluppierungswinkel bekannt, so erscheint es zweckmässig, alle Kluppierungsrichtungen zu berücksichtigen. Damit erhalten wir auch ein vergleichbares Mass für die verschiedene Wirkungsweise der Kluppierungsmethoden.

Die hier gemachten Annahmen müssen vielleicht etwas näher erläutert werden. Wir haben oben S. 243 gefunden, dass wenigstens betreffs Kiefer  $\beta$  unabhängig von dem Durchmesser ist. Es muss daher unnötig sein,  $\beta$  als eine Funktion des Durchmessers einzuführen. Wir beschränken jedoch diese Annahme von konstantem  $\beta$  auf jede Durchmesserstufe, um nicht die Fälle von variablem  $\beta$  ganz auszuschliessen.

Auch wenn  $\beta$  aber eine konstante Funktion des Durchmessers ist, so weist doch  $\beta$  in Wirklichkeit eine Streuung um einen Durchschnittswert herum auf. Diese Streuung ist aber innerhalb einer unendlich engen Durchmesserstufe ohne Bedeutung, denn in diesen Falle ist  $k_m$  = das arithmetische Mittel aus den einzelnen Korrektionsfaktoren der Stufe.

Wenn nun  $\beta$  wirklich eine konstante Funktion des Durchmessers ist, so sind die Durchschnittswerte von  $\beta$  in den verschiedenen Durchmesserklassen einander gleich, und dann kann man offenbar direkt mit dem Durchschnittswert des ganzen Bestandes ohne Fehler rechnen. Dies kann im allgemeinen jedoch nur dann eintreffen, wenn die Stammzahl unendlich gross ist. Der Regel nach weichen die Durchschnittswerte der Durchmesserstufen voneinander ab, und dann muss entweder die Berechnung gesondert für jede Klasse durchgeführt oder auch dem durchschnittlichen



$\beta$  eine mittlerer Fehler in statistischem Sinne hinzugefügt werden. In dieser Untersuchung kommt es aber nicht darauf an, die Genauigkeit der Grundflächenbestimmung in einem bestimmten Bestand hinsichtlich eines gegebenen  $\beta$  zu untersuchen, und daher kann die Berechnung dieses mittleren Fehlers in  $\beta$  vernachlässigt werden, und wir können folglich auch ohne wesentliche Beschränkung der Allgemeingültigkeit, auf die allgemeine Konstanz von  $\beta$  gestützt, gelegentlich mit einem willkürlich gewählten Durchschnittswert für den ganzen Bestand rechnen, wie dies auch später geschieht.

Es wurde auch die Annahme gemacht, dass die Stammzahl des Bestandes gross sei. Dies ist notwendig, um die allgemeine Vergleichung der Kluppierungsmethoden zu ermöglichen, und auch um eine sonst wünschenswerte, aber schwer durchzuführende Berechnung des mittleren Fehlers in  $k_m$  auszuschalten. (Vgl. über eine angenäherte Berechnung S. 296).

Der mittlere Korrektionsfaktor ( $k_m$ ) für eine bestimmte Durchmesserklasse wird allgemein aus der Gleichung:  $k_m \cdot G_b = G_s$  erhalten, wo  $G_b$  die nach der fraglichen Methode erhaltene Klassengrundfläche und  $G_s$  die wirkliche (wahre)<sup>1</sup> Grundfläche der Durchmesserklasse bezeichnet. Für den ganzen Bestand wird der mittlere Korrektionsfaktor ( $k_M$ ) durch Wägung des  $k_m$  der einzelnen Durchmesserklassen mit den betr. Klassengrundflächen erhalten, nach der Formel:  $k_1 g_1 + k_2 g_2 + k_3 g_3 + \dots = k_M [g_1 + g_2 + g_3 + \dots]$ , wo  $k_{1, 2, 3, \dots}$  die mittleren Korrektionsfaktoren der Durchmesserklassen und  $g_{1, 2, 3, \dots}$  ihre gemessenen Grundflächen bezeichnen.

Die Halbachsen der Ellipsenfläche werden wie gewöhnlich  $a$  und  $b$  genannt. Die wahre Fläche ist also  $= \pi ab$ . Der Anfang des Koordinatensystems liegt in dem Zentrum der Ellipse. Ein Durchmesser ist = dem Abstand zwischen zwei parallelen Tangenten. Werden die Koordinaten des Tangierungspunktes mit  $(x_1, y_1)$  bezeichnet, so lautet die Gleichung der Tangente in den laufenden Koordinaten  $(x, y)$ :

$$y = -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1} x + \frac{b^2}{y_1} \dots \dots \dots (2)$$

Der Abstand  $D_1$  zwischen zwei parallelen Tangenten (2) wird nach bekannten Formeln erhalten. Wir finden also:

$$D_1 = \frac{2 a^2 b^2}{\sqrt{a^4 y_1^2 + b^4 x_1^2}} \dots \dots \dots (3)$$

Nun ist jedoch der Winkelkoeffizient  $\operatorname{tg} v$  der Tangente  $= -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}$ , und ferner nach (2):  $y_1 = \operatorname{tg} v \cdot x_1 + \frac{b^2}{y_1}$ . Hieraus erhält man:

<sup>1</sup> Vgl. Fussnote S. 240.

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= + \frac{a \operatorname{tg} v}{\sqrt{\beta^2 + \operatorname{tg}^2 v}} \\ y_1 &= + \frac{a \beta^2}{\sqrt{\beta^2 + \operatorname{tg}^2 v}} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (4)$$

wo  $a\beta = b$ , also  $\beta = \frac{b}{a}$ . Die Grösse  $\beta$  hat oben den Namen das Achsenverhältnis erhalten. Die Exzentrizität ( $e$ ) einer Ellipse ist  $= \sqrt{1 - \beta^2}$ . Werden  $x_1$  und  $y_1$  gemäss (4) in (3) eingesetzt, so findet man:

$$D_1 = \frac{2 a \sqrt{\beta^2 + \operatorname{tg}^2 v}}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 v}} \dots \dots \dots (5)$$

(Vgl. TISCHENDORF, 1927, S. 52). Die fehlerhafte Fläche des Querschnitts ist  $= \frac{\pi}{4} D_1^2$ , die richtige ist  $= k_1 \frac{\pi}{4} D_1^2$ , und diese soll sein  $= \pi ab = \pi a^2 \beta$ . Also:

$$k_1 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \frac{4 a^2 (\beta^2 + \operatorname{tg}^2 v)}{1 + \operatorname{tg}^2 v} = \pi a^2 \beta \dots \dots \dots (6)$$

woraus man erhält:

$$k_1 = \frac{\beta (1 + \operatorname{tg}^2 v)}{\beta^2 + \operatorname{tg}^2 v} = \frac{\beta}{\sin^2 v + \beta^2 \cos^2 v} \dots \dots \dots (7)$$

Bei Derivation zeigt es sich, dass  $\frac{dk_1}{dv} = 0$  für:

$$v = 0^\circ \pm n \cdot 180^\circ, \text{ wenn } k_1 = \frac{1}{\beta} = \frac{a}{b} = \text{Maximum.}$$

$$v = 90^\circ \pm n \cdot 180^\circ, \text{ wenn } k_1 = \beta = \frac{b}{a} = \text{Minimum.}$$

Die Flächenberechnung wird richtig, wenn die Arme der Kluppe einen solchen Winkel ( $v$ ) mit der grossen Achse der Ellipse (Kluppierungswinkel) bilden, dessen  $\operatorname{tg} = \pm \sqrt{\beta}$  ist. Dies findet man aus der Gleichung:  $k_1 = \frac{\beta (1 + \operatorname{tg}^2 v)}{\beta^2 + \operatorname{tg}^2 v} = 1$ . Aus dieser Formel geht auch hervor, dass das Resultat richtig ist, wenn  $\beta = 1$ . Der numerisch grösste Fehler entsteht bei Kluppierung parallel der  $b$ -Achse (Kluppierungswinkel  $0^\circ$ ) und ist dann negativ; der grösste positive Fehler entsteht bei Kluppierung parallel der  $a$ -Achse (Kluppierungswinkel  $90^\circ$ ) (vgl. Fig. 11).

Der mittlere Korrektionsfaktor für eine Durchmesserklasse wird erhalten aus der Gleichung:

$$k_m^I \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} D_1^2 dv = 4\beta a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} dv \quad \dots \dots \dots (8)$$

und ist nach Einsetzen von  $D_1$  gemäss (5):

$$k_m^I = \frac{2\beta}{1 + \beta^2} \quad \dots \dots \dots (9)$$

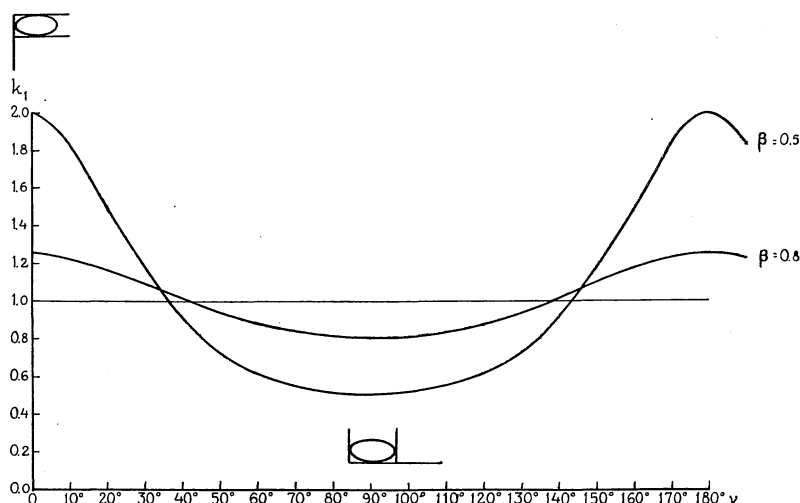


Fig. 11. Die Beziehung zwischen der Korrektion  $k_I$  und dem Kluppierungswinkel, elliptischer Querschnitt.  
Sambandet mellan korrektionen  $k_I$  och klavningsvinkeln, elliptiskt tvärsnitt.

Hiermit ist bewiesen, dass bei einfacher Kluppierung (also einem Durchmesser an jedem Stamm) keine Ausgleichung geschieht, wie man früher anzunehmen geneigt war (HEYER, 1846), sondern dass ein Fehler bestehen bleibt, ebenso gross wie der, den man erhält, wenn alle Bäume in einem Winkel von  $45^\circ$  kluppiert werden (vgl. TISCHENDORF, 1927). Ausgleichung geschieht natürlich in noch geringerem Grade, wenn die Achsen der Querschnitte orientiert sind und die Kluppierungsrichtung fixiert ist. So konstatierte z. B. GRUNDNER (1882) bei Kluppierung in Zentimeterklassen Unterschiede zwischen zwei Kluppierungen, die bei Buche bis zu 22,8 % der kleineren Fläche, bei Eiche bis zu 10—11 %, bei Kiefer bis zu 12—13 % betragen konnten. Im Durchschnitt für eine grosse Anzahl Kluppierungen erhielt GRUNDNER für Buche einen Unterschied von 5,6 %, für Eiche 6,8 %, für Kiefer 8,4 %.

So grosse Unterschiede können natürlich nicht geduldet werden, und da eine unaufhörliche Änderung der Kluppierungsrichtung keine vollständige Ausgleichung ergibt, so bleibt kein anderer Ausweg übrig, als jede einzelne Grundfläche sicherer zu messen.

Schon 1842 meinte KLAUPRECHT (GRUNDNER, 1882), dass man wenigstens zwei Durchmessermessungen für jede Grundfläche verlangen müsste. Man hat sich dabei zweier verschiedener Methoden bedient. Entweder

II: misst man den grössten und kleinsten Durchmesser, oder auch III: misst man senkrecht zueinander zwei beliebige Durchmesser.

Ferner kann man die erhaltenen Masse auf verschiedene Weise zur Berechnung der Grundfläche verwenden. Wie u. a. SCHMIDTBORN (1863) betont, gibt es drei gebräuchliche Methoden:

1. »Man nimmt aus der Summe der den zwei Durchmessern zugehörigen Kreisflächen die Hälfte».

2. »Man nimmt die Kreisfläche für den arithmetisch-mittleren Durchmesser».

3. »Man nimmt die Kreisfläche für den geometrisch-mittleren Durchmesser».

Wir können also sechs verschiedene Methoden anwenden, um die Grundfläche aus zwei Durchmessermessungen zu erhalten. Diese Methoden bezeichnen wir im folgenden mit: II: 1, 2, 3 und III: 1, 2, 3, und zu ihnen gehören sechs Korrektionsfaktoren:  $k_{II:1, 2, 3}$  und  $k_{III:1, 2, 3}$ . Wenn die Korrektionsfaktoren für zwei Methoden gleich sind, wird der gemeinsame Korrektionsfaktor so bezeichnet:  $k_{III:1}^{II:1}$ , damit andeutend, dass der Korrektionsfaktor für die Methode II: 1 und III: 1 denselben Wert hat.

Die Methoden II: 1 und III: 1 werden durch folgende Formel beschrieben:

$$Y = \frac{\pi}{4} \left( \frac{D_1^2 + D_2^2}{2} \right) \dots \dots \dots (11)$$

Wir erhalten also:

$$k_{III:1}^{II:1} \cdot \frac{\pi}{4} \left( \frac{D_1^2 + D_2^2}{2} \right) = \pi ab \dots \dots \dots (12)$$

$D_1$  ist nach (5)  $= \frac{2a\sqrt{\beta^2 + \operatorname{tg}^2 v}}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 v}}$ . Wenn in dieser Formel  $v$  gegen  $(90^\circ + v)$  ausgetauscht wird, so erhält man:

$$D_2 = \frac{2a\sqrt{1 + \beta^2 \operatorname{tg}^2 v}}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 v}} \dots \dots \dots (13)$$

Werden die Werte von  $D_1$  und  $D_2$  in (12) eingesetzt, so ist:

$$k_{III:1}^{II:1} = \frac{2\beta}{1 + \beta^2} \dots \dots \dots (14)$$

Die Korrektur ist also unabhängig von dem Kluppierungswinkel und ebenso gross für die beiden Methoden II:1 und III:1. Der mittlere Korrektionsfaktor für die Methode III:1, den wir mit  $k_m^{III:1}$  bezeichnen, ist folglich auch ebenso gross, d. h.

$$k_m^{III:1} = \frac{2\beta}{1 + \beta^2} \dots \dots \dots (15)$$

In den Fällen II:2 und III:2 haben wir die Formel:

$$Y = k_{III:2}^{II:2} \cdot \frac{\pi}{4} \left( \frac{D_1 + D_2}{2} \right)^2 = \pi ab \dots \dots \dots (16)$$

oder nach Einsetzung von  $D_1$  und  $D_2$  gemäss (5) und (13):

$$k_{III:2}^{II:2} = \frac{4\beta}{1 + \beta^2 + 2\sqrt{(\sin^2 v + \beta^2 \cos^2 v)(\cos^2 v + \beta^2 \sin^2 v)}} \dots (17)$$

Bei Derivation findet man  $\frac{dk}{dv} = 0$  für:

$$v = 0^\circ \pm n \cdot 90^\circ = \text{Maximum,}$$

$$v = 45^\circ \pm n \cdot 90^\circ = \text{Minimum.}$$

Der Kluppierungswinkel  $0^\circ \pm n \cdot 90^\circ$  entspricht dem Falle II:2, es ergibt sich demnach:

$$k_{II:2} = \frac{4\beta}{(1 + \beta^2)^2} \dots \dots \dots (18)$$

Im Falle III:2 variiert die Korrektur mit Kluppierungswinkel gemäss (17) (siehe Fig. 12), fällt bei  $v = 0^\circ \pm n \cdot 90^\circ$  mit  $k_{II:2}$  und erreicht bei  $v = 45^\circ \pm n \cdot 90^\circ$  sein Minimum, woselbst:

$$\min. k_{III:2} = \frac{2\beta}{1 + \beta^2} \dots \dots \dots (19)$$

(19) sagt aus, dass man, wenn man das Mittel zweier zueinander senkrechter Durchmesser nimmt, den grössten Fehler dann erhält, wenn diese in  $45^\circ$  Winkel gegen die grosse Achse des Querschnitts genommen werden. Dieser Fehler ist positiv.

Der mittlere Korrektionsfaktor für die Methode III:2, die ja ihrer Gewöhnlichkeit wegen in besonders hohem Grade des Interesses wert ist,

wird auf folgende Weise erhalten. Nach (5) und (13) erhält man nach Auflösung von  $\operatorname{tg} v$  in Sinus- und Kosinusfunktionen:

$$D_1 = 2 a \sqrt{1 - c \cos^2 v} \text{ und } D_2 = 2 a \sqrt{1 - c \sin^2 v}$$

wo  $1 - \beta^2$  mit  $c$  bezeichnet worden ist. Wir haben nun:

$$k_{m:2}^{\text{III}} \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - c \cos^2 v) dv + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - c \sin^2 v) dv + \right. \\ \left. + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(1 - c \cos^2 v)(1 - c \sin^2 v)} \cdot dv \right\} = 4 \beta \int_0^{\frac{\pi}{2}} dv \dots (20)$$

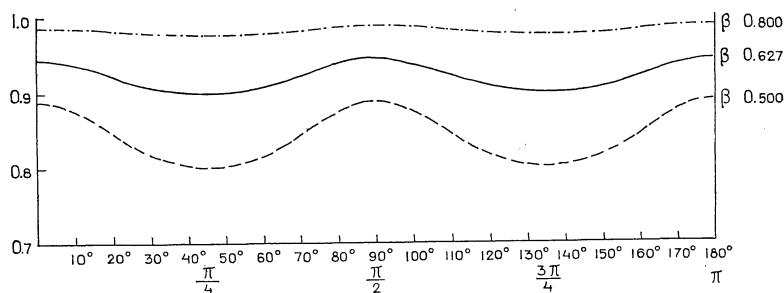


Fig. 12. Die Beziehung zwischen der Korrektur  $k_{\text{III}:2}$  und dem Kluppierungswinkel, elliptischer Querschnitt.

Sambandet mellan korrekturen  $k_{\text{III}:2}$  och klavningsvinkeln, elliptiskt tvärsnitt.

Hier ist nur das Integral, in welchem das Wurzelzeichen vorkommt, beschwerlich. Durch Multiplikation der beiden Klammern und Absonderung von  $\sqrt{1 - c}$  erhalten wir, wenn ausserdem  $\frac{c^2}{1 - c}$  mit  $p$  bezeichnet wird:

$$2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(1 - c \cos^2 v)(1 - c \sin^2 v)} \cdot dv = 2 \sqrt{1 - c} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + p \sin^2 v \cos^2 v} \cdot dv$$

Dieser Ausdruck wird noch weiter durch Einführung der Bezeichnung  $\Phi = p \sin^2 v \cdot \cos^2 v$  vereinfacht. Wir erhalten schliesslich:

$$k_{m:2}^{\text{III}} \left\{ \pi - \frac{c\pi}{2} + 2 \sqrt{1 - c} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \Phi} \cdot dv \right\} \dots (21)$$

Durch Reihenentwicklung des Integralausdrucks erhalten wir diesen =

$$2\sqrt{1-c}\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}} dv + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Phi dv - \frac{1}{2 \cdot 4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Phi^2 dv + \frac{3}{6 \cdot 8}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Phi^3 dv\right\} \quad (22)$$

welche Formel nach Einsetzen von  $\Phi = p \sin^2 v \cos^2 v$ ,  $p = \frac{c^2}{1-c}$  und Ausrechnung der nun auftretenden Integrale ergibt:

$$2\sqrt{1-c}\left\{\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \frac{\pi c^2}{16(1-c)} - \frac{1}{8} \cdot \frac{9}{6 \cdot 8 \cdot 16} \frac{\pi c^4}{(1-c)^2} + \dots\right\} \dots \quad (23)$$

Durch Einsetzen von (23) in (21) und Wiedereinführung von  $c = 1 - \beta^2$  erhalten wir schliesslich:

$$k_m^{\text{III}:2} = \frac{4\beta}{(1+\beta)^2 + \frac{(1-\beta^2)^2}{8\beta} - \frac{3(1-\beta^2)^4}{4 \cdot 8 \cdot 16\beta^3} + \dots} \dots \quad (24)$$

Für die Fälle II:3 und III:3 gilt:

$$Y = k_{\text{III}:3}^{\text{II}:3} \cdot \frac{\pi}{4} D_1 \cdot D_2 = \pi ab \dots \dots \dots (25)$$

und daher, wenn die Werte von  $D_1$  und  $D_2$  gemäss (5) bzw. (13) eingesetzt werden:

$$k_{\text{III}:3}^{\text{II}:3} = \frac{\beta(1+\text{tg}^2 v)}{\sqrt{(\beta^2 + \text{tg}^2 v)(1+\beta^2 \text{tg}^2 v)}} = \frac{\beta}{\sqrt{(\sin^2 v + \beta^2 \cos^2 v)(\cos^2 v + \beta^2 \sin^2 v)}} \quad (26)$$

Die Formel ergibt bei Derivation  $\frac{dk}{dv} = 0$  für:

$$v = 0^\circ + n \cdot 90^\circ = \text{Maximum,}$$

$$v = 45^\circ \pm n \cdot 90^\circ = \text{Minimum.}$$

Für den Fall II:3 mit dem Kluppierungswinkel  $0^\circ + n \cdot 90^\circ$  wird:

$$K_{\text{II}:3} = 1 \dots \dots \dots (27)$$

d. h. diese Methode ist exakt richtig. Dies ist leicht ersichtlich aus (25), da ja  $D_1 = 2a$  und  $D_2 = 2b$ .

In dem Fall III:3 variiert die Korrektur mit dem Kluppierungswinkel gemäss (26), fällt bei  $v=0^\circ \pm n \cdot 90^\circ$  mit  $k_{\text{III}:3}$  zusammen und hat bei  $v=45^\circ \pm n \cdot 90^\circ$  ein Minimum, wo:

$$\min k_{\text{III}:3} = \frac{2\beta}{1+\beta^2} \dots \dots \dots (28)$$

Durch eine Rechnung ähnlich der, die betreffs der Methode III : 2 vorgenommen wurde, erhalten wir für die Methode III : 3:

$$k_m^{III:3} = \frac{1}{1 + \frac{(1 - \beta^2)^2}{16\beta^2} - \frac{9(1 - \beta^2)^4}{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 16 \cdot \beta^4} + \dots} \dots \dots (29)$$

### Doppelellipse.

Es ist oben als wahrscheinlich nachgewiesen worden, dass die Querschnitte, wenn sie nicht ellipsenförmig sind, als aus zwei Ellipsen mit verschiedener Exzentrizität zusammengesetzt betrachtet werden können. Es ist solchenfalls sicher, dass, wenn überhaupt Unterschiede zwischen den Fehlern bei Kluppierung von elliptischen und ovalen Querschnitten vorkommen, diese am stärksten hervortreten werden, wenn der Unterschied zwischen den Exzentrizitäten der Ellipsen gross ist. Wird die Exzentrizität der einen Ellipsenhälfte  $e_1$  genannt und die der anderen  $e_2$  und ist  $e_1 > e_2$ , so ist der grösste Unterschied, der vorkommen kann,  $= + e_1$  und der kleinste  $= 0$ . Der letztere Fall ist oben behandelt worden. Der erstere Fall setzt voraus, dass die eine Hälfte des Querschnitts ein Halbkreis ist. Da es kaum in Frage kommen kann, besondere Berechnungen für das Zwischengebiet auszuführen, Berechnungen, die sich übrigens auf dieselbe Weise wie für die Grenzfälle gestalten würden, so machen wir hier die Annahme, dass die Querschnitte aus einer Halbellipse und einem Halbkreis zusammengesetzt sind.

Bei einfacher Kluppierung, gemäss Methode I also, erhalten wir den Korrektionsfaktor aus folgender Gleichung:

$$k_1 \cdot \frac{\pi}{4} D_1^2 = \frac{\pi ab + \pi b^2}{2} = \frac{\pi}{2} a^2 \beta_1 (1 + \beta_1) \dots \dots \dots (30)$$

wo das rechte Glied bedeutet Fläche der Doppelellipse = Fläche einer Ellipse mit der grossen Achse  $a + b$  und der kleinen Achse  $b$  sowie mit dem Achsenverhältnis  $\frac{2b}{a+b} = \frac{2\beta_1}{1+\beta_1}$ , wo  $\beta_1$  das Achsenverhältnis der

Halbellipse ist. Wird das Achsenverhältnis des Querschnitts  $\frac{2b}{a+b}$ , wie oben,  $\beta$  genannt, so ist also  $\beta = \frac{2\beta_1}{1+\beta_1}$ . Durch Einführung des Wertes von:

$$D_1 = \frac{a \sqrt{\beta_1^2 + \operatorname{tg}^2 \nu}}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \nu}} + \beta_1 a \dots \dots \dots (31)$$

d. h. Radius des Halbkreises + halber Tangentenabstand gemäss (5),



erhalten wir, nachdem ferner  $\beta_1$  durch  $\beta$  gemäss der Gleichung  $\beta_1 = \frac{\beta}{2-\beta}$  ersetzt worden ist:

$$k_I = \frac{4\beta}{(2-\beta)^2 + \beta^2 - 4\cos^2 v (1-\beta) + 2\beta(2-\beta)\sqrt{1-4\cos^2 v \cdot \frac{1-\beta}{(2-\beta)^2}}} \quad (32)$$

Wir finden leicht, dass für:

$$v = 0^\circ \pm n \cdot 180^\circ \quad k_I \text{ ist } = \frac{1}{\beta} = \text{Maximum,}$$

$$v = 90^\circ \pm n \cdot 180^\circ \quad k_I \text{ ist } = \beta = \text{Minimum.}$$

Bei einem Vergleich mit den entsprechenden Resultaten für die Ellipse zeigt es sich, dass die Korrektionsfaktoren bei Klupierung nach Methode I genau gleich gross werden, ob nun der Querschnitt elliptisch oder oval ist. Aus der Formel für die Fläche des Ovals ersieht man leicht, dass dies für sämtliche Korrektionsfaktoren gilt, wenn  $v = 0^\circ \pm n \cdot 90^\circ$ . Es ist jedoch zu beachten, dass dieses Resultat an die spezielle Ovalform gebunden ist, die wir für den Querschnitt gewählt haben, und dass es durchaus nicht generalisiert werden kann.

Die mittlere Korrektion  $k_m^I$  wird erhalten aus der Gleichung:

$$k_m^I \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\pi}{4} D_1^2 dv = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\pi}{2} a^2 \beta_1 (1 + \beta_1) \cdot dv,$$

die nach Einsetzen des Wertes in  $D_1$  gemäss (31) sowie Ausrechnung der einfachen Integrale ergibt:

$$k_m^I \cdot \left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{3\pi\beta_1^2}{4} + 2\beta_1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - (1 - \beta_1)^2 \cos^2 v} \cdot dv \right\} = \pi\beta_1 (1 + \beta_1) \quad (33)$$

In dieser Gleichung ist das Integral ein elliptisches Integral der zweiten Art und liegt bereits berechnet vor (JAHNKE-EMDE, 1923, S. 68). Das Integral hat den Modul  $k = \frac{2\sqrt{1-\beta}}{2-\beta}$ . Aus (33) berechnet sich demnach:

$$k_m^I = \frac{8\beta}{(2-\beta)^2 + 3\beta^2 + 4\beta(2-\beta)\left[\frac{2E}{\pi}\right]} \dots \dots \dots (34)$$

wo das elliptische Integral mit  $E$  bezeichnet worden ist.  $E$  kann in Form einer Reihe ausgedrückt werden:

$$E = \frac{\pi}{2} \left[ 1 - \frac{1}{4} k^2 - \frac{9}{4 \cdot 16} \cdot \frac{k^4}{3} - \frac{9 \cdot 25}{4 \cdot 16 \cdot 36} \cdot \frac{k^6}{5} - \dots \right] \dots (35)$$

Nach (II) und (3I), aus welcher letzterer Gleichung  $D_2$  dadurch erhalten wird, dass an Stelle von  $\operatorname{tg} v$  gesetzt wird:  $-\frac{1}{\operatorname{tg} v}$ , erhalten wir für die Methoden II: I und III: I:

$$k_{\text{III: I}}^{\text{II: I}} \{ 1 + 3\beta_1^2 + 2\beta_1 [\sqrt{1 - c \cos^2 v} + \sqrt{1 - c \sin^2 v}] \} = 4\beta_1(1 + \beta_1) \quad (36)$$

wo  $c = 1 - \beta_1^2 = \frac{4(1 - \beta)}{(2 - \beta)_2}$ . Durch Einführung des Wertes  $\beta_1 = \frac{\beta}{2 - \beta}$  wird erhalten:

$$k_{\text{III: I}}^{\text{II: I}} = \frac{8\beta}{(2 - \beta)^2 + 3\beta^2 + 2\beta(2 - \beta) \{ \sqrt{1 - c \cos^2 v} + \sqrt{1 - c \sin^2 v} \}} \quad (37)$$

Für:

$$v = 0^\circ \pm n \cdot 90^\circ \text{ ist } k = \frac{2\beta}{1 + \beta^2} = \text{Maximum.}$$

Für:

$$v = 45^\circ \pm n \cdot 90^\circ \text{ ist } k = \frac{8\beta}{(2 - \beta)^2 + 3\beta^2 + 4\beta \sqrt{1 + (1 - \beta)^2}} = \text{Minimum.}$$

Der mittlere Korrektionsfaktor wird aus (37) durch Integrierung zwischen  $\frac{\pi}{2}$  und 0 erhalten und ist:

$$k_{\text{m}}^{\text{III: I}} = \frac{8\beta}{(2 - \beta)^2 + 3\beta^2 + 4\beta(2 - \beta) \left[ \frac{2E}{\pi} \right]} \dots \dots \dots (38)$$

d. h. gleich  $k_{\text{m}}^{\text{I}}$ .

Gemäss anwendbaren Teilen von (16) und (3I) ist für die Methoden II: 2 und III: 2:

$$k_{\text{III: 2}}^{\text{II: 2}} = \frac{16\beta}{(2 - \beta)^2 + 5\beta^2 + 2\beta(2 - \beta) \{ 2\sqrt{1 - c \cos^2 v} + 2\sqrt{1 - c \sin^2 v} + \sqrt{1 + p \sin^2 v \cos^2 v} \}} \dots \dots (39)$$

wo  $c = 1 - \beta_1^2 = \frac{4(1 - \beta)}{(2 - \beta)^2}$  und  $p = \frac{c^2}{1 - c} = \frac{4^2(1 - \beta)^2}{\beta^2(2 - \beta)^2}$ .

Für:

$$v = 0^\circ \pm n \cdot 90^\circ \text{ ist } k = \frac{4\beta}{(1 + \beta)^2} = \text{Maximum.}$$

Für:

$$v = 45^\circ + n \cdot 90^\circ \text{ ist } k = \frac{16\beta}{(2-\beta)^2 + 5\beta^2 + 2\{4\beta\sqrt{1+(1-\beta)^2} + \sqrt{\beta^2(2-\beta)^2 + 4(1-\beta)^2}\}} = \text{Minimum.}$$

Der mittlere Korrektionsfaktor wird durch Rechnungen ähnlich den vorhergehenden erhalten und ist:

$$k_m^{\text{III:2}} = \frac{16\beta}{(2-\beta)^2 + 5\beta^2 + 4\beta(2-\beta)\left[\frac{4E}{\pi} + \frac{1}{2} + \frac{(1-\beta)^2}{2\beta^2(2-\beta)^2} - \frac{3(1-\beta)^4}{8\beta^4(2-\beta)^4} + \dots\right]} \quad (40)$$

Hier ist, wie früher,  $E$  das elliptische Integral (35) mit dem Modul  $k = \sqrt{c}$ .

Gemäss anwendbaren Teilen von (25) und (31) erhalten wir für die Methoden II:3 und III:3:

$$k_{\text{III:3}}^{\text{II:3}} = \frac{4}{\beta + (2-\beta)\{\sqrt{1-c\cos^2 v} + \sqrt{1-c\sin^2 v} + \sqrt{1+p\sin^2 v \cos^2 v}\}} \quad (41)$$

mit wie vorher

$$c = \frac{4(1-\beta)}{(2-\beta)^2} \text{ und } p = \frac{4^2(1-\beta)^2}{\beta^2(2-\beta)^2}.$$

Für:

$$v = 0^\circ + n \cdot 90^\circ \text{ ist } k = 1 = \text{Maximum,}$$

$$v = 45^\circ + n \cdot 90^\circ \text{ ist } k = \frac{4\beta}{\beta^2 + 2\beta\sqrt{1+(1-\beta)^2} + \sqrt{\beta^2(2-\beta)^2 + 4(1-\beta)^2}} = \text{Minimum.}$$

Der mittlere Korrektionsfaktor ist:

$$k_m^{\text{III:3}} = \frac{4}{\beta + 2(2-\beta)\left[\frac{2E}{\pi} + \frac{1}{2} + \frac{(1-\beta)^2}{2\beta^2(2-\beta)^2} - \frac{3(1-\beta)^4}{8\beta^4(2-\beta)^4} + \dots\right]} \quad (42)$$

wo  $E$  die Bedeutung hat, die ihm in Gleichung (35) mit dem Modul  $k = \sqrt{c}$  gegeben worden ist.

Um anschaulich alle die bisher berechneten Korrektionsfaktoren miteinander vergleichen und dadurch zu einer Auffassung von dem gegenseitigen Wert der verschiedenen Kluppierungs- und Berechnungsmethoden gelangen zu können, nehmen wir an, dass  $\beta$  den Wert 0,8 hat, und berechnen danach die numerischen Werte der Korrektionsfaktoren. Diese sind in nachstehender Tabelle I zusammengestellt.

Tab. 1. Korrekktionsfaktoren,  $\beta = 0,8$ .  
Korrektionsfaktorer,  $\beta = 0,8$ .

Methode Metod	E l l i p s e			O v a l		
	Min.	Max.	Mittlere Medel	Min.	Max.	Mittlere Medel
I	0,8000	1,2500	0,9756	0,8000	1,2500	0,9708
II : 1	0,9756	0,9756	—	0,9756	0,9756	—
III : 1	0,9756	0,9756	0,9756	0,9663	0,9756	0,9708
II : 2	0,9877	0,9877	—	0,9877	0,9877	—
III : 2	0,9756	0,9877	0,9816	0,9662	0,9877	0,9767
II : 3	1,0000	1,0000	—	1,0000	1,0000	—
III : 3	0,9756	1,0000	0,9877	0,9661	1,0000	0,9826

Wir vergleichen zuerst die Kluppierungen nach der Methode II, d. h. Kluppierungen übers Kreuz. Es zeigt sich da, dass die Berechnungsmethode 3  $\left[ Y = \frac{\pi}{4} D_1 \cdot D_2 \right]$  ein richtiges Resultat sowohl für Ellipse als für Oval liefert. Die Berechnungsmethode 2  $\left[ Y = \frac{\pi}{4} \left( \frac{D_1 + D_2}{2} \right)^2 \right]$  ergibt den Korrektionsfaktor 0,9877 ( $= + 1,23$  % Fehler), gleich für Ellipse und Oval. Die Berechnungsmethode 1  $\left[ Y = \frac{\pi}{4} \left( \frac{D_1^2 + D_2^2}{2} \right) \right]$  ergibt den Korrektionsfaktor 0,9756 ( $= + 2,44$  %), ebenfalls gleich für Ellipse und Oval. Hieraus geht hervor, dass die Methode 3 die beste und ausserdem vollkommen richtig und die Methode 1 die schlechteste ist, während die Methode 2 ungefähr mitten dazwischen liegt.

Was die erste und die dritte Kluppierungsmethode betrifft, so genügt es, die mittleren Korrektionsfaktoren zu vergleichen. Aus der Tabelle ersieht man, dass diese bei derselben Berechnungsmethode niedriger bei dem Oval als bei der Ellipse sind, d. h. bei Einfach- oder Kreuzkluppierung in variierenden Richtungen erhält man grössere Fehler, wenn die Querschnitte oval, als wenn sie elliptisch sind.

Die Berechnungsmethode 3 ist die beste ( $+ 1,33$ ,  $+ 1,74$  %), und die Berechnungsmethode 1 ( $+ 2,44$ ,  $+ 2,92$  %) ist die schlechteste. Die Berechnungsmethode 2 liegt ungefähr mitten dazwischen ( $+ 1,84$ ,  $+ 2,33$  %).

Es zeigt sich also, dass man unter den gegebenen Voraussetzungen betreffs der Form der Querschnitte die besten Grundflächenwerte dadurch erhält, dass man übers Kreuz kluppert und die Grundfläche nach der Ellipsenformel berechnet. Sollte es nicht möglich sein, übers Kreuz zu kluppieren, dagegen möglich, zwei beliebige zueinander senkrechte Durchmesser zu kluppieren, so erreicht man der Regel nach ein besseres

Resultat, wenn die Ellipsenformel bei der Berechnung statt der Kreisformel verwendet wird.

Die erhaltenen Resultate geben eine Methode an, die Grundflächenberechnungsmethoden zu verfeinern. Wir haben gefunden, dass die besten Grundflächenwerte bei Kluppierung übers Kreuz erhalten werden. Die Messung im Felde ist also am besten so einzurichten, dass die grössten und kleinsten Durchmesser der Bäume gemessen werden. Es hat sich auch gezeigt, dass die gewöhnliche Methode, den Durchmesser der der Grundfläche entsprechenden Kreisfläche als das arithmetische Mittel der Durchmesser zu berechnen, zu hohe Grundflächenwerte ergibt. Eigentlich sollte das geometrische Mittel der Durchmesser verwendet werden. Wenn nun der Regel nach die Grundfläche in einem Bestande dadurch berechnet wird, dass man die Bäume auf Durchmesserklassen verteilt, so kann eine Tabelle leicht aufgestellt werden, die für einen bestimmten, z. B. kleineren Durchmesser angibt, wie gross der grössere sein darf, damit der Baum einer gewissen Durchmesserklasse zuzuzählen sei, wenn der wirkliche mittlere Durchmesser des Baumes als ein geometrisches Mittel berechnet wird. Das Verteilen wird sogar auf diese Weise ziemlich beträchtlich vereinfacht, da die lästige Berechnung der Mittel wegfällt.

Nur beiläufig sei hier erwähnt, dass es beim Kluppieren zweier beliebiger Durchmesser nicht selbstverständlich ist, dass diese senkrecht zueinander sein müssen, um im Mittel den kleinsten Fehler zu liefern. Diese Frage ist näher nur insofern untersucht worden, als der Winkel, bei welchem ein richtiges Resultat erhalten wird, für elliptische Querschnitte und verschiedene Berechnungsmethoden berechnet worden ist. Dieser Winkel weicht der Regel nach so unbedeutend von  $90^\circ$  ab, dass eine spezielle Berücksichtigung desselben nicht ohne besondere Messvorrichtungen möglich ist.

### Umfangmessung.

Schon vor langer Zeit kam man zu der Erkenntnis, dass Umfangmessung der Grundflächen schlechtere Resultate ergab als Durchmessermessung. Man verglich da die verschiedenen Messmethoden mit den Werten der Grundfläche, die durch Planimetrierung oder Berechnung nach der SIMPSON'schen Formel erhalten worden waren. Die Umfangmessung ergibt im allgemeinen wenigstens betreffs mancher europäischen Waldbäume eine grössere Grundfläche als die wirkliche nach der obengenannten Regel und auch eine grössere, als wie man sie mittels Durchmessermessung erhält. Es beruht dies, meint man, auf der Menge kleinerer Un-

regelmässigkeiten, Borkerippen, Rindeschuppen, Flechtenflöckchen, Äste usw., die das Massband hindern, sich dicht dem Stamme anzuschliessen. Dass die Umfangmessung hier gleichwohl in Betracht gezogen wird, beruht auf besonderen Umständen, die weiter unten zu erwähnen sein werden.

### Kreis.

Ist der Querschnitt kreisförmig, so berechnet man die Grundfläche richtig aus der Gleichung:

$$V = \frac{s^2}{4\pi} \dots \dots \dots (43)$$

wo  $s$  = die Länge der Peripherie.

### Ellipse.

Ist jedoch die Grundfläche ellipsenförmig, so erhalten wir, da:

$$s = \pi(a + b) \left\{ 1 + \frac{1}{4} \left( \frac{a-b}{a+b} \right)^2 + \frac{1}{64} \left( \frac{a-b}{a+b} \right)^4 + \dots \right\} \dots \dots (44)$$

folgende Formel für die Korrektur:

$$k_{IV} = \frac{4\beta}{(1 + \beta)^2 \left[ 1 + \frac{1}{4} \left( \frac{1-\beta}{1+\beta} \right)^2 + \dots \right]} \dots \dots \dots (45)$$

Wir erhalten hieraus für  $\beta = 0,80$  eine Korrektur =  $0,9816$ , d. h. eine gleich grosse wie bei Kreuzklappierung im Mittel für variierende Richtungen gemäss Methode 2.

### Doppelellipse.

Ist die Grundfläche aus einer Halbellipse und einem Halbkreis zusammengesetzt, so erhält man den Korrekturfaktor:

$$k_{IV} = \frac{4\beta}{(\beta + F)^2} \dots \dots \dots (46)$$

wo  $F$  die Reihe bezeichnet:

$$1 + \frac{(1-\beta)^2}{4} + \frac{(1-\beta)^4}{64} + \dots \dots \dots (47)$$

Der Korrekturfaktor für  $\beta = 0,8$  ist danach  $0,9767$ , d. h. ebenso gross wie bei Kreuzklappierung im Mittel für variierende Richtungen gemäss Methode 2.

Vergleichen wir diese für Umfangmessung berechneten Korrekturen mit den für Durchmesser messung berechneten, die in Tab. I zu finden

sind, so sehen wir, dass es immer möglich ist, elliptische oder ovale Grundflächen besser durch Durchmesser- als durch Umfangsmessung zu berechnen. Weichen die Grundflächen von diesen Typenformen ab, muss dieser Schluss jedoch innerhalb gewisser Grenzen stichhaltig sein. Es gibt wahrscheinlich aber auch Umstände, die die Wahl zwischen den beiden Messmethoden beeinflussen können, die aber nicht in Beziehung zur Genauigkeit der Methoden stehen. So kann z. B. die Grösse der Bäume oder die Beschaffenheit des Arbeitermaterials u. a. m. die Umfangsmessung bequemer oder praktischer erscheinen lassen. Es dürfte folglich unmöglich sein, ein allgemeingültiges Urteil über die Überlegenheit der einen oder der anderen Messmethode zu fällen, sobald auch praktische Rücksichten mit in Betracht gezogen werden. Für schwedische Verhältnisse, besonders im Versuchswesen, dürfte man schliesslich sagen können, dass die Durchmesser- messung im allgemeinen vorzuziehen ist, denn einerseits sind, wie eben gesagt wurde, bessere Werte der Grundfläche für die hier ausgewählten Typenformen dadurch erreichbar, und andererseits wird auch der oben erwähnte systematische Fehler der Umfangsmessung dadurch automatisch vermieden. Praktische Vorteile der Umfangsmessung kommen ausserdem hier kaum vor.

Es sei nochmals daran erinnert, dass alle in diesem Kapitel berechneten Korrekturfaktoren nur dann gültig sind, wenn die Querschnitte wirklich Ellipsen oder Ovale sind. Weichen die Grundflächen von diesen Typenformen ab, und das, wissen wir, tun sie oft, so können die Korrekturfaktoren ganz andere Werte erhalten.

### III. Abrundung und Klasseneinteilung.

#### Abrundung.

Bei den meisten Präzisionskluppierungen, wobei millimetergraduierte Kluppen angewandt werden, geschieht die Aufzeichnung der Durchmesser in ganzen Millimetern, d. h. es geschieht eine Klasseneinteilung mit der Klassenweite 1 mm. Alle Grundflächen werden direkt aus den notierten Massen berechnet. Da nun alle Bäume zwischen 2 Millimeterstrichen der Regel nach, wenn nicht immer, als den Durchmesser der unteren Grenze besitzend notiert werden, so geschieht hier eine Abrundung nach unten, was also eine systematische Unterschätzung der Grundfläche zur Folge hat. Den hierdurch entstehenden Fehler nennen wir den Abrundungsfehler. Nehmen wir an, dass das kluppierte Baummaterial hinreichend gross und innerhalb jeder Mm-Stufe konstant verteilt ist, was in Anbe-

tracht der engen Stufen erlaubt scheint, so ist die Abrundung im Mittel  $\lambda = 0,5$  mm. Wir haben also, wenn die Querschnitte kreisrund sind:

$$\frac{\pi}{4} k \cdot D^2 = \frac{\pi}{4} (D + \lambda)^2 \dots \dots \dots (48)$$

oder explizite:

$$k = \frac{(D + \lambda)^2}{D^2} \dots \dots \dots (49)$$

Ist, wie oben erwähnt,  $\lambda = 0,5$  mm, so finden wir aus (49), dass der Korrektionsfaktor für Durchmesserwerte 5—30 cm folgende Grössen hat:

Durchm. 5 cm	$k = 1,0201$
10 »	$k = 1,0100$
15 »	$k = 1,0067$
20 »	$k = 1,0050$
25 »	$k = 1,0040$
30 »	$k = 1,0033$

Wir ersehen hieraus, dass die systematische Unterschätzung ziemlich merkbare Beträge erreicht, und sehen auch, dass diese Korrekturen in einer Richtung entgegengesetzt den früher behandelten wirken.

Es wäre daher von Interesse, den gesamten Abrundungsfehler der Grundflächenbestimmung eines ganzen Bestandes zu kennen. Zu diesem Zwecke ist es notwendig, eine Voraussetzung betreffs der Stärkeverteilung des Bestandes zu machen. Bekanntlich variiert diese in hohem Grade infolge einer Menge verschiedener Umstände, wie Baumart, Bonität, Behandlungsweise usw. Oft aber kann der Hauptzug derselben als mit einer der gewöhnlichen Frequenzkurven übereinstimmend angesehen werden, entweder der GAUSS'schen oder der von CHARLIER dargestellten (vgl. CAJANUS 1914 und LÖNNROTH 1926). Da zurzeit nichts Näheres über die Übereinstimmung der Stammverteilung mit dem letzteren Typus bekannt ist, während dagegen der erstere oft studiert worden ist, so können wir zweckmässigerweise die GAUSS'sche Frequenzkurve als Vergleichsobjekt nehmen. Wenn diese einem gegebenen Stammmaterial angepasst wird, so pflegen recht oft die höheren Charakteristiken, besonders die dritte, hohe Werte zu erreichen, d. h. die Stammverteilung hat oft bedeutende Schiefeit. In unserem vorliegenden Falle ist es jedoch von hauptsächlichem Interesse, diejenigen Stammverteilungen zu studieren, von denen man erwarten kann, dass sie Extremwerte des Abrundungsfehlers und des weiter unten zu behandelnden Klasseneinteilungsfehlers ergeben. In dieser Hinsicht genügt es, mit der normalen Frequenzkurve zu rechnen, und dadurch, dass man in speziellen Fällen einen grösseren



oder geringeren Teil derselben in Betracht zieht, verschiedene Stammverteilungstypen aufzustellen. Es sind der Hauptsache nach zwei, die näher studiert zu werden verdienen, nämlich die beiden, die hier der Niederdurchforstungstypus und der Hochdurchforstungstypus genannt werden. Der erstere ist durch eine im grossen und ganzen normale Frequenzverteilung charakterisiert und kann durch eine normale Frequenzkurve von GAUSS'schem Typus beschrieben werden (siehe Fig. 13). Der letztere ist durch eine mit steigendem Durchmesser ununterbrochen fallende Frequenz charakterisiert und kann durch eine halbe Normalkurve beschrieben werden (siehe Fig. 13). Es ist nun klar, dass diese beiden

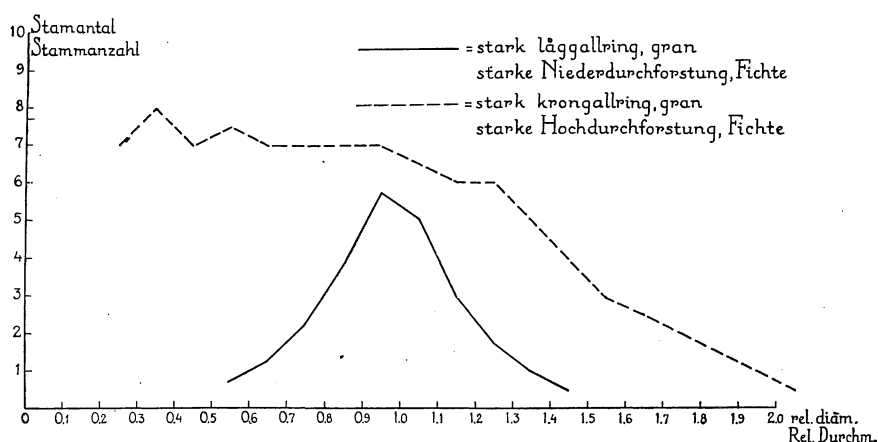


Fig. 13. Frequenzkurven von Hoch- und Niederdurchforstungstypus.  
Frekvenskurvor av kron- och läggallringstyp.

Typen hier nur in der Absicht aufgestellt worden sind, zwei zur Berechnung der Grundflächenfehler verwendbare schematische Extremfälle zu erhalten. Um eine tiefere Bedeutung handelt es sich nicht, und an die exakte Übereinstimmung zwischen Material und Kurve werden keine grösseren Forderungen gestellt.

Die Gleichung der normalen Frequenzkurve kann geschrieben werden:

$$y = \frac{N}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \dots \dots \dots (50)$$

In unserem Falle bedeutet  $y$  die Stammanzahl in einer kleinen Durchmesserklasse mit der Weite  $dx$ ,  $N$  die Gesamtanzahl Stämme, die als sehr gross vorausgesetzt wird, und  $x$  den Unterschied zwischen einem bestimmten Durchmesser  $\varphi$  (cm) und dem Durchmesser  $D_0$  (cm), von welchem die grösste Anzahl vorkommt, d. h. dem Durchmesser am höchsten Punkte

der Frequenzkurve. Der Unterschied wird mit seinem Vorzeichen gerechnet und in der Dispersion  $\mu$  cm als Einheit ausgedrückt.  $\mu$  ist ein Mass für die Streuung der Durchmesser um den Durchschnittsdurchmesser  $D_0$  herum.  $x$  ist also  $= \frac{\varphi - D_0}{\mu}$ .  $D_0$  ist, wie gesagt, der Durchschnittsdurchmesser des Bestandes.

Wenn wir nun annehmen, dass der Durchmesserpunkt 0 cm von dem Punkte  $x = 0$  um  $p$   $x$ -Einheiten abliegt (siehe Fig. 14), so ändert  $N$  seine Bedeutung und ist nicht mehr ein Ausdruck für die Stammanzahl des Bestandes.  $N$  bedeutet nämlich die Gesamtanzahl Stämme in dem Bestande nur, wenn  $p = -\infty$ . Hat dagegen  $p$  einen anderen und zwar endlichen Wert, so wird die Stammanzahl des

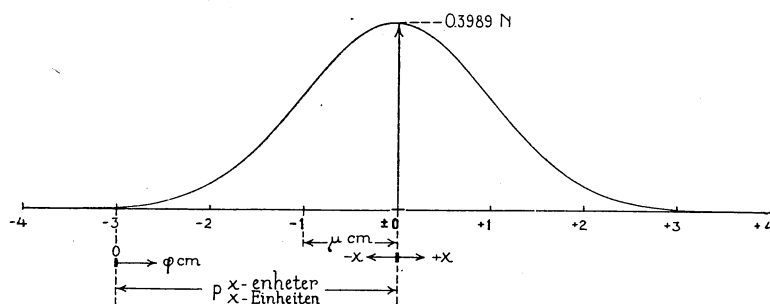


Fig. 14. Die normale Frequenzkurve, vgl. Text S. 266 und 267.  
Den normala frekvenskurvan, jfr texten sid. 266 och 267.

Bestandes dadurch erhalten, dass man das Integral:  $\frac{N}{\sqrt{2\pi}} \int_p^\infty e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot dx$  berechnet. Auch ist jetzt  $D_0$  nicht = dem Durchschnittsdurchmesser des Bestandes. Dieser unterscheidet sich nämlich von dem zahlreichst vorkommenden Durchmesser, sobald  $p$  von  $-\infty$  abweicht. Wenn jedoch  $p < -3$ , so ist diese Verschiebung gering und wir können näherungsweise annehmen, dass  $D_0$  andauernd = dem Durchschnittsdurchmesser ist. Wir haben dann die Beziehung:

$$\varphi = \mu (x - p) \dots \dots \dots (51).$$

Die wahre Summe aller Grundflächen,  $\Sigma g_s$ , von  $\varphi = 0$  bis  $\varphi = +\infty$ , ist:

$$\Sigma g_s = \frac{\pi}{4} \mu^2 \int_p^\infty y (x - p)^2 dx \dots \dots \dots (52).$$

Wir wiederholen hier, dass eine Voraussetzung für die Richtigkeit dieser

Formel die ist, dass  $N$  gross ist, d. h. anders ausgedrückt, dass  $y$  als eine stetige Funktion von  $x$  darstellbar ist.

Bevor wir diese Gleichung weiter entwickeln, wollen wir ein paar Distinktionen machen. Unter dem Durchschnittsdurchmesser einer Dimensionsklasse verstehen wir im allgemeinen das arithmetische Mittel aus allen in der Dimensionsklasse vorkommenden Durchmessern, und speziell verstehen wir unter dem theoretischen Durchschnittsdurchmesser dasselbe arithmetische Mittel, wenn die Anzahl Bäume in der Klasse unbegrenzt gross ist. Unter dem mittleren Durchmesser der Klasse verstehen wir den Durchmesser, dessen Grundfläche das arithmetische Mittel aus allen in der Klasse vorkommenden Grundflächen ist, und speziell ist der theoretische mittlere Durchmesser dasselbe Mittel, wenn die Anzahl Bäume in der Klasse unbegrenzt gross ist.

Wird der Ausdruck  $(x - p)^2$  in (52) ausgerechnet, so hängt die Lösung der Gleichung von der Lösung folgender Integrale ab:

$$\int_p^{+\infty} y \cdot dx; \int_p^{+\infty} yx \cdot dx; \int_p^{+\infty} yx^2 \cdot dx \dots \dots \dots (53).$$

Diese lassen sich nicht bequem für willkürliche  $p$ -Werte berechnen, sie sind dagegen leicht zu berechnen, wenn  $p = -\infty$  oder  $+0$ . Das einfachste Verfahren, sie auszurechnen, besteht darin, dass man die Integrale zwischen den Grenzen  $+\infty$  berechnet und davon den Wert der Integrale zwischen  $p$  und  $-\infty$  abzieht, welchen Wert man leicht durch Summierung in den statistischen Tabellen, die für  $y$  berechnet vorliegen, erhält.

Das erste Integral hier oben ist

$$\int_{-\infty}^{+\infty} y \cdot dx = N; \int_0^{+\infty} y \cdot dx = \frac{N}{2} \dots \dots \dots (54).$$

Für den Beweis sei verwiesen auf SERRET-SCHEFFER (1921), S. 194, Teil II.

Das zweite Integral wird leicht durch die Substitution  $\frac{x^2}{2} = t$ ,  $dx = \frac{dt}{\sqrt{2t}}$  erhalten und ist:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} yx \cdot dx = 0; \int_0^{+\infty} yx \cdot dx = \frac{N}{\sqrt{2\pi}} \dots \dots \dots (55)$$

Wir haben als bekannt vorausgesetzt, dass  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} \cdot dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$  [vgl.

die Gleichung (54)]. Derivieren wir diese Gleichung inbezug auf  $a$  (unter dem Integralzeichen im linken Glied), so ergibt sich:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} \cdot x^2 \cdot dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a^3}} \dots \dots \dots (56)$$

Wird hier  $a$  der Wert  $\frac{1}{2}$  erteilt, so erhalten wir das dritte Integral in (53):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} yx^2 \cdot dx = N; \int_0^{+\infty} yx^2 \cdot dx = \frac{N}{2} \dots \dots \dots (57)$$

Was nun noch erübrigt, ist die Kenntnis von den Werten der drei Integrale zwischen den Grenzen  $p$  und  $-\infty$ . Durch numerische Rechnung mit Hilfe von Wahrscheinlichkeitstabellen (PEARSON 1924), wobei in den beiden letzteren Integralen die  $x$ -Klassenweite  $= \frac{1}{20}$  und  $y$  bis zur siebenten Dezimale ausgenutzt worden ist, finden wir, dass:

$$\left. \begin{aligned} \int_{-\infty}^{-3} y \cdot dx &= + 0,0013499 \cdot N \\ \int_{-\infty}^{-3} yx \cdot dx &= - 0,0044281 \cdot N \\ \int_{-\infty}^{-3} yx^2 \cdot dx &= + 0,0146215 \cdot N \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (58)$$

Hier können die 5 ersten Dezimalen als sicher betrachtet werden, und wir erhalten somit:

$$\left. \begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} y \cdot dx &= + 0,99865 \cdot N \\ \int_{-\infty}^{+\infty} yx \cdot dx &= + 0,00443 \cdot N \\ \int_{-\infty}^{+\infty} yx^2 \cdot dx &= + 0,98538 \cdot N \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (59)$$

Wir wählen in diesen Integralen  $p = -3$ , um dadurch die Frequenz in der Durchmesserklasse 0 sehr klein zu erhalten, und um auf diese

Weise den Niederdurchforstungstypus in den Berechnungen zu realisieren. Die Wahl ist durchaus willkürlich, wirkt aber nicht prinzipiell auf die Tendenzen der gesuchten Grundflächenfehler ein. Nach (52) haben wir nun die wahre Grundfläche:

$$\Sigma g_s = \frac{\pi}{4} \mu^2 N \cdot \{3^2 \cdot 0,99865 + 0,98538 + 2 \cdot 3 \cdot 0,00443\}$$

oder ausgerechnet:

$$\Sigma g_s = \frac{\pi}{4} \mu^2 N \cdot 9,99981 \dots \dots \dots (60)$$

Gilt es nun, die Grösse desjenigen Fehlers zu untersuchen, welcher entsteht, wenn die Klassenweite für  $\varphi = 0,1$  cm ist, und der mittlere Klassendurchmesser als an der unteren Grenze der Klasse liegend angesehen wird, so müsste in (52) eigentlich das Integralzeichen gegen ein  $\Sigma$ -Zeichen ausgetauscht und müssten die Summen numerisch berechnet werden, wobei alle Durchmesserwerte in die Rechnung mit dem Werte  $\varphi \sim 0,05$  cm eingehen. Es kann jedoch vorausgesetzt werden, dass eine so weit getriebene Klasseneinteilung, praktisch genommen, dasselbe Resultat wie eine exakte Integrierung ergibt, weshalb wir ohne Nachteil das Integralzeichen beibehalten können und dafür nur  $x$  gegen  $x - A$  austauschen, wo also  $A$  = der halben Klassenweite, ausgedrückt in  $x$ -Einheiten, ist.  $2 \mu A$  ist also die Klassenweite in  $\text{cm} = \lambda$ .

Wir erhalten nun aus (52) die gemessene Grundflächensumme:

$$\Sigma g_b = \frac{\pi}{4} \mu^2 N \{ (3 - A)^2 \cdot 0,99865 + 0,98538 + 2 (3 - A) \cdot 0,00443 \} \dots (61)$$

Der Korrektionsfaktor, mit dem diese Grundflächensumme multipliziert werden muss, um den richtigen Wert zu ergeben, ist:

$$k = \frac{9,99981}{(3 - A)^2 \cdot 0,99865 + 0,98538 + 2 (3 - A) \cdot 0,00443} \dots \dots (62)$$

Durch  $A$  ist  $k$  abhängig von  $\mu$ , das seinerseits ein Ausdruck für die absolute Grösse der Durchmesser des Bestandes ist, indem  $3 \mu$  approximativ = dem Durchschnittsdurchmesser ( $D_0$ ) und  $6 \mu$  der grösste Durchmesser ist, den man Aussicht hat, (in 3 Fällen auf 1000) in dem Bestande anzutreffen.

Wenn $\mu = 1$ ,	so ist $D_0 = 3$ cm und $k = 1,0307$
» $\mu = 3$ ,	» » $D_0 = 9$ » » $k = 1,0097$
» $\mu = 5$ ,	» » $D_0 = 15$ » » $k = 1,0060$
» $\mu = 7$ ,	» » $D_0 = 21$ » » $k = 1,0031$

Aus dieser Tabelle erhellt, dass bei Kluppierung ganzer Bestände die anscheinend unbedeutende Abrundung von  $\frac{1}{2}$  mm sich ziemlich kräftig geltend macht, indem sie eine Unterschätzung der Bestandsgrundfläche um 0,5—1 % in Bestandstypen von gewöhnlich vorkommender Stärke mit sich bringt. Der Fehler nimmt rasch mit steigendem Durchmesser ab. Diese Ziffern gelten für den Niederdurchforstungstypus.

Was den Hochdurchforstungstypus betrifft, so geschieht die Berechnung sehr einfach dadurch, dass man in (52)  $p = 0$  setzt. Wir erhalten nun den wahren Grundflächenwert:

$$\Sigma g_s = \frac{\pi}{4} \frac{\mu^2 N}{2} \dots \dots \dots (63)$$

Der durch Kluppierung berechnete Wert ( $\Sigma g_b$ ) ist anderseits:

$$\Sigma g_b = \frac{\pi}{4} \mu^2 N \left\{ \frac{1}{2} + \frac{A^2}{2} - \frac{2A}{\sqrt{2\pi}} \right\} \dots \dots \dots (64)$$

Der Korrektionsfaktor wird aus (63) und (64) erhalten:

$$k = \frac{1}{2 \left( \frac{1}{2} + \frac{A^2}{2} - \frac{2A}{\sqrt{2\pi}} \right)} \dots \dots \dots (65)$$

Wird  $\mu = 2$  gesetzt, so entspricht dieser dem  $\mu$ -Wert 1 bezüglich des Niederdurchforstungstypus, denn in beiden Fällen ist der grösste (= praktisch genommen grösste) Durchmesser des Bestandes 6 cm. Auf dieselbe Weise entspricht in dem Hochdurchforstungstypus  $\mu = 6$  dem Wert  $\mu = 3$  in dem Niederdurchforstungstypus,  $\mu = 10$  entspricht  $\mu = 5$  und  $\mu = 14$  entspricht  $\mu = 7$ . Wenn wir daher  $k$  aus (65) für die  $\mu$ -Werte 2, 6, 10, 14 berechnen, so erhalten wir Korrektionsfaktoren, die direkt mit denen verglichen werden können, die früher für den Niederdurchforstungstypus berechnet worden sind.

Es ergibt sich für  $\mu = 2 \quad k = 1,0409$   
 $\mu = 6 \quad k = 1,0134$   
 $\mu = 10 \quad k = 1,0080$   
 $\mu = 14 \quad k = 1,0057.$

Wir finden also bei einem Vergleich mit der entsprechenden Tabelle für den Niederdurchforstungstypus, dass die Unterschätzung dort geringer ist. Der Hochdurchforstungstypus wird also schlechter abgeschätzt, was ja ganz natürlich ist, da er zu relativ grösserem Teil aus schwachen Di-

mensionen besteht, bei denen eine Abrundung um einen bestimmten absoluten Betrag grössere Bedeutung hat als bei stärkeren Dimensionen.

AMILON (1928) hat der Auffassung Ausdruck gegeben, dass der Abrundungsfehler bei mm-Klasseneinteilung sehr unbedeutend sei (S. 304). Diese Auffassung ist nur dann richtig, wenn die Abrundung zum nächsten Strich hin geschehen ist, dagegen, wie wir soeben gesehen haben, unzutreffend, wenn, wie das gewöhnlich geschieht, die Abrundung zur unteren Grenze der Klasse hin geschieht. Wie AMILON bei seinen Untersuchungen zuwege gegangen ist, geht aus seinem Aufsatz nicht deutlich hervor.

Es verdient hier erwähnt zu werden, dass der Abrundungsfehler, der betreffs der Grundfläche bei Millimeterabrundung entsteht, auch in gewissen Fällen seine Bedeutung über die Schätzung der Kubikmasse hinaus erstreckt. Denn da der Abrundungsfehler von einer Funktion des Durchmessers abhängt, die nicht direkte Proportionalität ausdrückt, so werden bei Sektionierung die Grundflächen mit von unten nach oben variablen und näher präzisiert steigenden Fehlerprozenten bestimmt, weshalb nicht nur die Kubikmasse, sondern auch die Formzahl zu niedrig geschätzt wird. Dieser Umstand, obwohl letzthin in einer Grundflächenbestimmung wurzelnd, gehört doch zunächst dem Gebiet der Kubikmassenschätzung an, weshalb ihm hier nicht eine nähere Untersuchung gewidmet wird.

### Klasseneinteilung.

Bei der Schätzung der Grundfläche eines Waldbezirkes pflegt man der Regel nach noch eine Klasseneinteilung vorzunehmen. Entweder direkt im Walde oder auch zu Hause auf Grund einer im Walde errichteten Stammnummerliste, welche die in Millimeter, Zentimeter, Zoll o. dgl. verzeichneten Durchmesser enthält, verteilt man die Bäume auf Klassen mit grösserem Umfang. Die Grundfläche wird dann so berechnet, als wenn alle Bäume der Klasse einen gemeinsamen, zumeist in der Mitte der Klasse gelegenen Durchmesser hätten. Auch eine andere Verlegung des mittleren Klassendurchmessers kommt vor. Bei den Klasseneinteilungen, die uns hier zunächst interessieren, nämlich denjenigen, die in unserem Lande bei wissenschaftlicher Probeflächenarbeit gemacht werden, ist die Klassenweite 1 cm. Durch diese Klasseneinteilung entstehen Fehler in der Grundflächenbestimmung, die wir zum Unterschied von den vorher behandelten Abrundungsfehlern Klasseneinteilungsfehler nennen, und die wir nun näher untersuchen wollen. Diese beiden Fehler sind ihrer Natur nach Klasseneinteilungsfehler, wir benennen sie verschieden nur der Übersichtlichkeit wegen.

Die Frage ist früher u. a. von TISCHENDORF (1927) behandelt worden. Er meint, dass, wenn das Baummaterial sehr gross ist, die Wahrscheinlich

keit für eine positive oder eine negative Abweichung von der Klassenmitte gleich gross ist. Auf Grund dieser Annahme berechnet er die mittlere Abweichung, die Dispersion, als die Wurzel aus der Summe der Abweichungsquadrate, dividiert durch die Anzahl der Varianten, und kommt so zu einer Dispersion des einzelnen Durchmessers innerhalb einer Klasse

$$= \pm \frac{a}{2\sqrt{3}}, \text{ wo } a = \text{die Klassenweite.}$$

Diese Überlegung erschöpft jedoch erstens nicht die Klasseneinteilungsfrage in ihrer Gesamtheit und ist ausserdem der Regel nach nicht stichhaltig. Es liegt nämlich klar zutage, dass bei Kluppierung eines grossen Baumaterialies, das sich nicht nach der speziellen Frequenzkurve  $y = \text{Konst.}$  verteilt, die Wahrscheinlichkeit für positive und negative Abweichungen von dem Durchmesser der Klassenmitte verschieden ist, je nachdem in welchem Punkt des gesamten Durchmesserintervalls die Klasse liegt. Wenn nämlich die Klasse auf dem aufwärtssteigenden Teil der Frequenzkurve liegt, so sind mehr Stämme und damit mehr positive Abweichungen oberhalb der Klassenmitte, weniger Stämme und weniger negative Abweichungen unterhalb der Klassenmitte vorhanden. Liegt die Klasse auf dem abwärtsgehenden Teil der Frequenzkurve, so ist das Verhältnis das umgekehrte.

Ist die Stammanzahl sehr gross, so ist es auch nicht ein mittlerer Fehler, den wir suchen, denn ein solcher existiert nicht unter der genannten Voraussetzung. Es gibt nur zwei Werte für  $\sum$  Grundfläche, nämlich den wahren,  $\sum g_s$ , der nach (52) berechnet wird, und den berechneten,  $\sum g_b$ , der bei der Klasseneinteilung nach (67) erhalten wird. Keiner von diesen Werten kann in einem bestimmten Falle wechseln, sie sind konstant und haben den mittleren Fehler  $\pm 0$ . Anders stellt sich die Sache, wenn die Stammanzahl gering ist. Wir kommen auf diese Frage noch weiter unten zurück.

### Systematische Klasseneinteilungsfehler.

Was uns in erster Linie interessiert, ist der Fehler bei der Grundflächenbestimmung. Dieser Fehler macht offenbar den Unterschied aus zwischen der wahren Grundfläche der Klasse und derjenigen Grundfläche, die dadurch erhalten wird, dass man die Grundfläche der Klassenmitte mit der Anzahl Bäume in der Klasse multipliziert. Wenn daher die Stämme sich über das Durchmessergebiet nach einer Frequenzkurve  $y = f(\varphi)$  verteilen, wenn die Stammanzahl ausserdem sehr gross ist oder, falls sie klein ist, doch in jedem Punkte sich strikt nach der angenommenen Frequenzkurve verteilt, so dass die nachstehende Gleichung an-



dauernd gilt, und wenn ferner der Durchmesser mit  $\varphi$  bezeichnet wird, so muss folgende Gleichung gelten, wenn  $\varphi_1$  die obere und  $\varphi_2$  die untere Grenze der Klasse ist:

$$K \cdot \frac{\pi}{4} \left( \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \right)^2 \int_{\varphi_2}^{\varphi_1} f(\varphi) d\varphi = \frac{\pi}{4} \int_{\varphi_2}^{\varphi_1} \varphi^2 f(\varphi) d\varphi \dots \dots \dots (66)$$

Ist die Funktion  $f(\varphi)$  die oben diskutierte normale Frequenzkurve, so berechnen wir die wahre Grundflächensumme im Bestande auf dieselbe Weise wie oben durch die Substitution (51), wobei wir über (52) schliesslich zu (60) kommen, welche Gleichung also  $\Sigma g_s$  ergibt, wenn  $\varphi$  von  $+\infty$  bis 0 gemäss der normalen Frequenzkurve variiert und  $p = -3$  ist (Niederdurchforstungstypus). Betreffs des Hochdurchforstungstypus, wenn  $p = 0$ , wird die wahre Grundflächensumme nach (63) erhalten.

Der in cm-Klassen berechnete Grundflächenbetrag wird dadurch erhalten, dass man die Rechnung ausführt:

$$\Sigma g_b = \frac{\pi}{4} \sum \left( \frac{2\varphi + 1}{2} \right)^2 \int_{\varphi}^{\varphi+1} f(\varphi) \cdot d\varphi \dots \dots \dots (67)$$

was leicht mit Hilfe der obenangeführten Tabellen geschehen kann.

Für den Niederdurchforstungstypus erhalten wir demnach folgende Korrektionsfaktoren:

$$\text{Wenn } \mu = \frac{5}{6}; \quad D_0 = 2,5 \text{ cm: } K = 0,98816$$

$$\mu = \frac{5}{3}; \quad D_0 = 5,0 \text{ cm: } K = 0,99701$$

$$\mu = \frac{10}{3}; \quad D_0 = 10,0 \text{ cm: } K = 0,99925$$

$$\mu = 5; \quad D_0 = 15,0 \text{ cm: } K = 0,99967$$

$$\mu = 10; \quad D_0 = 30,0 \text{ cm: } K = 0,99992$$

Es sei daran erinnert, dass  $D_0$  approx. = Durchschnittsdurchmesser des Bestandes.

Für den Hochdurchforstungstypus gilt hier wie früher, dass die Korrektionsfaktoren für doppelt so grosse  $\mu$ -Werte direkt vergleichbar mit den Korrektionsfaktoren des Niederdurchforstungstypus sind. Folglich können die nachstehenden Korrektionsfaktoren für den Hochdurchforstungstypus Zeile für Zeile mit den oben für den Niederdurchforstungstypus berechneten verglichen werden:

$$\mu = \frac{5}{3}: K = 0,97008$$

$$\mu = \frac{10}{3}: K = 0,99256$$

$$\mu = \frac{20}{3}: \quad \quad \quad \text{—}$$

$$\mu = 10: K = 0,99917$$

$$\mu = 20: \quad \quad \quad \text{—}$$

Auch betreffs einer Einteilung in 1 cm-Klassen zeigt es sich also, dass die grössten Fehler in Beständen von Hochdurchforstungstypus entstehen. Die Grösse des Fehlers nimmt rasch mit steigendem Bestandsdurchmesser ab, und der Fehler ist seinem Vorzeichen nach positiv, d. h. eine Überschätzung findet statt.

AMILON hat neulich (1928) die Frage nach dem Klasseneinteilungsfehler berührt. Da sein Aufsatz der letzte ist, der in unserm Lande in dieser Sache geschrieben worden ist, so dürfte auf ihn hier kurz einzugehen sein. Wenn die Grundfläche einer Durchmesserklasse nach dem Durchmesser der Klassenmitte als mittlerem Durchmesser berechnet wird und die Verteilung der Stämme über die Klasse konstant gleich ist, so zeigt AMILON, dass der theoretische mittlere Durchmesser etwas grösser ist als der Durchmesser der Klassenmitte. Die Berechnung nach diesem letzteren ergibt also einen negativen Fehler. Für den Fall dagegen, dass die Frequenz innerhalb der Klasse fallend ist, behauptet AMILON, dass der Fehler positiv ausfällt, woraus folge, dass der theoretische mittlere Durchmesser nun kleiner ausfallen müsse als der Durchmesser der Klassenmitte. Dies ist nicht völlig richtig, denn bei konstanter Frequenzverteilung ist der theoretische mittlere Durchmesser grösser als der Durchmesser der Klassenmitte, und bei fallender Frequenzverteilung gibt es also unter allen Umständen eine solche, bei welcher der theoretische mittlere Durchmesser mit der Klassenmitte zusammenfällt. Wenn ferner AMILON meint, dass sich der negative Fehler bei konstanter Frequenzverteilung von dem angenommenen positiven Fehler bei fallender Frequenzverteilung »subtrahiert« (d. h. in Wirklichkeit »addiert«), so macht er sich offenbar eines Gedankenfehlers schuldig, der jedoch glücklicherweise keine nachteilige Einwirkung auf die von ihm berechneten Ziffern gehabt haben kann.

Im Anschluss an die obigen beiden Tabellen ist es sehr einfach, die Korrekturfaktoren für andere Klassenweiten als 1 cm zu berechnen. Wenn wir nämlich nur  $x$  nicht Anzahl Zentimeter, sondern Anzahl Durchmesserklassen bedeuten lassen, so entspricht in der Tabelle für den

Niederdurchforstungstypus  $u = 5$ ,  $D_0 = 15,0$  cm bei 1 cm-Klasseneinteilung genau  $u = 5$ ,  $D_0 = 30,0$  cm bei 2 cm-Klasseneinteilung. Der Korrektionsfaktor für einen Bestand mit 30,0 cm Durchschnittsdurchmesser und 2 cm-Klasseneinteilung ist daher 0,99967, bei 3 cm-Klasseneinteilung 0,99925, bei 6 cm-Klasseneinteilung 0,99701. Ist der Durchschnittsdurchmesser des Bestandes 15,0 cm, so ist der Korrektionsfaktor bei 3 cm-Klasseneinteilung 0,99701, bei 6 cm-Klasseneinteilung 0,98816. Die letzte Ziffer lässt deutlich den Nachteil allzu weiter Klassen erkennen, denn es handelt sich hier um Fehler von über 1 % in Beständen von sehr gewöhnlicher Dimensionszusammensetzung und bei einer Klassenweite, die nicht sehr die bisweilen angewandten übersteigt.

Was die Möglichkeit betrifft, durch Verschiebung der Lage des Klassendurchmessers, nach welchem die Klassengrundflächen berechnet werden, den wahren Grundflächenwert zu erreichen, so ist leicht einzusehen, dass die Zweckmässigkeit derartiger Methoden vollständig von der Beschaffenheit der fraglichen Frequenzkurven abhängt. Es lässt sich zeigen, dass gewisse Bestimmungen dieser Art, die in unserem Lande angewandt werden, zu beträchtlichen Fehlern Anlass geben können.

Wenn z. B. die durchschnittliche Stammverteilung, die sich bei der Reichswaldabschätzung ergeben hat, einer Berechnung des Fehlers der Grundflächenbestimmung bei den staatlichen Forsteinrichtungen zugrunde gelegt wird, so zeigt es sich, dass der Fehler — 3,2 bis 4,9 % beträgt, je nachdem welche der beiden vorgeschriebenen Einrichtungsmethoden angewandt wird. Der mittlere Durchmesser der Klasse soll nach diesen Methoden 0,5 cm unter die Klassenmitte verlegt werden, und die Fehlerprocente beziehen sich auf die gemessene Grundfläche von 10 bzw. 9 cm Durchmesser an und darüber. Die Klassenweite ist 5 bzw. 3 cm. In dem schwedischen Resümee ist diese Frage etwas ausführlicher erörtert worden.

LANGSÆTER (1929) hat in einem Aufsatz über den mittleren Durchmesser der Durchmesserklasse die Frage nach der Berechnung dieses mittleren Durchmessers aus den bekannten Baumanzahlen der Klassen behandelt. Seine Berechnungen geben zweifellos einen praktisch gangbaren Weg für die Feststellung des mittleren Durchmessers an, sie ruhen aber gleichwohl auf theoretisch nicht völlig befriedigender Grundlage. Eine Methode im Sinne LANGSÆTERS dürfte mit Vorteil bei den Waldabschätzungen angewandt werden, sobald die Dimensionsklassen nicht hinreichend klein gemacht werden können oder die Probestämme nicht so zahlreich sind, dass sie die Stammverteilung des Waldes in genügendem Masse repräsentieren. Die Methode verdient daher Aufmerksamkeit.

## Zufällige Klasseneinteilungsfehler.

Der bisher angestellten Überlegung über die Einwirkung der Klasseneinteilung auf die Grundflächenbestimmung liegt, wie wir uns erinnern, die Annahme zugrunde, dass die Stammanzahl sehr gross ist. Die ganze Entwicklung ist jedoch richtig, auch wenn die Stammanzahl klein ist, für den Fall nämlich, dass wir das Differential  $dx$  als eine endliche Grösse mit dem Werte  $\Delta x$  auffassen und gleichzeitig vorschreiben, dass der mittlere Durchmesser der in dieses Intervall fallenden wenigen Bäume = dem theoretischen mittleren Durchmesser ist. Gibt es also beispielsweise nur einen Baum in der Klasse  $\Delta x$ , so genügt es nicht, dass dieser innerhalb der Klasse liegt, er muss auch genau die Grösse des theoretischen mittleren Durchmessers der Klasse haben. Selbstverständlich ist dies eine Forderung, die nicht aufrechterhalten werden kann, wenn die Stammanzahl innerhalb der Population hinreichend klein wird. Hier werden im Gegenteil die reinen Zufälle eine entscheidende Rolle spielen. Wir können fortgesetzt sehr wohl unsere Annahme aufrechterhalten, dass die Stammverteilung im ganzen einer gewissen Frequenzkurve folgt, wenn wir aber aus der totalen Stammanzahl einen kleinen Teil herausnehmen, so wird es von Zufälligkeiten abhängen, in welchem Masse dieser Teil derselben Frequenzkurve folgt. Das Problem, das sich nun erhebt, ist anderer Art als die vorhergehenden. Für diese haben wir Korrekturfaktoren berechnen können, für das jetzt vorliegende ist dies unmöglich. Stattdessen haben wir hier einen Zusatzausdruck, der entweder positiv oder negativ sein kann, und der ein Mass dafür abgibt, in welchem Grade das Spiel der Zufälligkeiten eine Abweichung von dem wirklichen Mittelwert bewirkt. Ein geeignetes derartiges Mass ist bekanntlich die Dispersion. Es gilt also zu berechnen, wie gross der mittlere Fehler bei einer klassenweisen Berechnung der Grundfläche in einem Bestande ist, dessen Stammverteilung einer bestimmten Frequenzkurve folgt. Dieser mittlere Fehler kann als ein Repräsentationsfehler aufgefasst werden, da er ja deshalb entsteht, weil der vorhandene Stammverteilungstypus auf unzureichende Weise durch das kluppierte Stammmaterial repräsentiert wird. Dieses Problem ist es, das von TISCHENDORF unter Voraussetzung konstanter Frequenzverteilung ( $y = \text{Konst.}$ ) in Angriff genommen und teilweise gelöst worden ist. Wie wir uns von S. 273 her erinnern, wurde der Wert  $\pm \frac{a}{2\sqrt{3}}$  für die Dispersion des Durchmessers innerhalb einer Durchmesserklasse erhalten. Eine Dispersion bezeichnen wir hier allgemein mit  $\sigma$  mit den Indizes  $d, \varphi, g$  usw., je nach der Grösse, auf die sie sich bezieht. Der mittlere Fehler des Mediums wird allgemein mit

$\varepsilon$  mit einem die betreffende Grösse markierenden Index bezeichnet. Der Zusammenhang zwischen  $\sigma$  und  $\varepsilon$  wird ausgedrückt durch die Formel

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \text{ wo } n \text{ die Anzahl Varianten bedeutet, deren Dispersion } \sigma \text{ ist.}$$

Denken wir uns nun eine Durchmesserklasse mit der Weite  $a$ , in welcher eine geringe Anzahl Bäume belegen sind, so wissen wir, dass diese Bäume eine Tendenz haben, sich gemäss einer Frequenzkurve  $y = f(\varphi)$  zu verteilen. Wären es hinreichend viele, so würde ihr theoretischer Durchschnittsdurchmesser  $d_0$  sein, jetzt, wo sie nur eine geringe Anzahl bilden, kann ihr Durchschnittsdurchmesser im Mittel von  $d_0$  um einen bestimmten Betrag  $\pm \varepsilon_{d_0}$  abweichen. Wir kennen den theoretischen Durchschnittsdurchmesser  $d_0$  der Klasse, denn er kann aus der Funktion  $y = f(\varphi)$  berechnet werden. Die Durchmesser der einzelnen Bäume kennen wir nicht, aber wir wissen, dass sie eine Tendenz haben, sich nach derselben Funktion zu verteilen. Wenn wir annehmen, dass dies vollständig geschieht, d. h. dass die Stammanzahl sehr gross wäre, so können wir auf Grund dessen die theoretische Streuung der Bäume um  $d_0$  herum berechnen. Hierdurch erhalten wir  $\sigma_\varphi$ . Wäre nun die Stammanzahl tatsächlich sehr gross, so würde ja  $\varepsilon_{d_0} = \pm \frac{\sigma_\varphi}{\sqrt{\infty}} = 0$ , d. h. der

mittlere Fehler würde verschwinden. Ist sie dagegen klein und  $= n$ , so wird der mittlere Fehler des Durchschnittsdurchmessers der Klasse  $\varepsilon_{d_0} = \pm \frac{\sigma_\varphi}{\sqrt{n}}$ , denn  $\sigma_\varphi$  ist ja unabhängig von der Stammanzahl. Dieser

mittlere Fehler des Durchschnittsdurchmessers in einer bestimmten Klasse kann dann in mittlere Fehler der Grundfläche übergeführt werden. Wenn diese in allen Klassen bekannt sind, so kann danach der Gesamtfehler der Summe der Grundflächen aller Klassen berechnet werden. Wir haben bisher nur von Durchschnittsdurchmessern gesprochen. Diese sind jedoch nicht identisch mit den grundflächenrichtigen mittleren Durchmessern der Klasse, um welche herum die Streuung eigentlich berechnet werden müsste. Wegen gewisser mathematischer Schwierigkeiten müssen wir jedoch die Approximation machen, dass wir  $\sigma_\varphi$  um den Durchschnittsdurchmesser herum anstatt um den mittleren Durchmesser herum berechnen.

In der Durchmesserklasse, deren Weite  $a$  ist, kann  $d_0$  auf verschiedenen Punkten liegen, je nach der Beschaffenheit der Frequenzkurve  $f(\varphi)$  sowie der Lage der Durchmesserklasse im Verhältnis zu dieser. Wir können betreffs einer bestimmten Durchmesserklasse uns denken, dass  $d_0$  die Klasse in zwei Teile teilt, wovon der eine  $a_1$  und der andere  $a_2$  ist.  $a_1 + a_2$  ist dann gleich  $a$ . Die Wahrscheinlichkeit einer Abweichung

nach der einen Seite von  $d_0$  hin ist nun zwar nicht ebenso gross wie die Wahrscheinlichkeit einer Abweichung nach der anderen Seite hin, aber gross ist der Unterschied nicht.  $d_0$  markiert nämlich die Lage des Schwerpunkts der Durchmesserklasse, während dagegen derjenige Punkt, der die halbe Stammanzahl auf jeder Seite von sich hat, den Punkt gleicher Wahrscheinlichkeit für Abweichung nach jeder der beiden Seiten hin bezeichnet. Diese beiden Punkte können innerhalb einer begrenzten Durchmesserklasse nicht beträchtlich verschieden belegen sein, und es scheint daher eine ziemlich akzeptable Approximation zu sein, sie zusammenfallen zu lassen.

Wir denken uns nun jeden der beiden Teile  $a_1$  und  $a_2$  in  $n$  gleiche Teile geteilt. Die ganze Klasse  $a$  wird also in Summa  $2n$  Teile geteilt. Ausserdem nehmen wir an, dass die Frequenzverteilung innerhalb jedes der beiden Klassenteile konstant ist, was ja offenbar eine Approximation bedeutet, aber doch eine weitaus bessere als die Annahme konstanter Frequenzverteilung innerhalb der ganzen Klasse. Die möglichen Abweichungen von  $d_0$  sind nun:<sup>1</sup>

$$+\frac{a_1}{n}, +2\frac{a_1}{n}, +3\frac{a_1}{n}, +4\frac{a_1}{n}, \dots +n\frac{a_1}{n}$$

$$-\frac{a_2}{n}, -2\frac{a_2}{n}, -3\frac{a_2}{n}, -4\frac{a_2}{n}, \dots -n\frac{a_2}{n}$$

Da  $2n\sigma_\varphi^2$  = Summe der Abweichungsquadrate, erhalten wir also:

$$\sigma_\varphi^2 = \frac{1}{2n^3} [a_1^2 (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots n^2) + a_2^2 (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots n^2)] \quad (68)$$

Nun ist jedoch:  $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots n^2 = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}$ . Setzen wir ferner  $a_2 = \gamma a$  und  $a_1 = a(1 - \gamma)$ , so erhalten wir aus (68), wenn  $n$  dem Werte  $\infty$  zustrebt:

$$\sigma_\varphi = \pm \frac{a}{\sqrt{6}} \cdot \sqrt{(1 - \gamma)^2 + \gamma^2} \dots \dots \dots (69)$$

Wenn  $a_1 = a_2 = \frac{1}{2}a$  ist, so erhalten wir hieraus:  $\sigma_\varphi = \pm \frac{a}{2\sqrt{3}}$ .

Es ist folglich möglich, einen approximativen Wert von  $\sigma_\varphi$  zu erhalten, sobald  $\gamma$  bekannt ist. Dessen Grösse hängt ab teils von der Funktion  $y = f(\varphi)$ , teils von der Lage der Durchmesserklasse innerhalb des gesamten Durchmesserintervalls. Wenn wir wie vorher annehmen, dass  $y = \frac{N}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$  und  $\varphi = \mu(x - p)$ , so können wir  $\gamma$  in jedem beliebigen

<sup>1</sup> Vgl. Nachtrag S. 300.

Punkt der Kurve berechnen. Wenn nämlich die Klassengrenzen  $x_1$  und  $x_2$  sind, so haben wir den Schwerpunkt der Klasse im Punkte  $x_0 = \frac{1}{n} \int_{x_2}^{x_1} y x \cdot dx$ , wenn  $n$  = Stammanzahl in der Klasse und  $\gamma = \frac{x_0 - x_2}{x_1 - x_2}$ .

Indessen ist  $\frac{1}{n} \int_{x_2}^{x_1} y x \cdot dx =$

$$x_0 = \frac{\int_{x_2}^{x_1} e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot dx}{\int_{x_2}^{x_1} e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot dx} \dots \dots \dots (70)$$

Es ist daher sehr leicht, mit Hilfe statistischer Tabellen, in denen sowohl die Funktion  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$  wie deren Integral tabuliert sind,  $x_0$  und danach  $\gamma$  gemäss der obigen Formel zu berechnen.

Nachdem  $\gamma$  bekannt ist, erhalten wir  $\sigma_\varphi$  aus (69). Werden nun die betreffenden Stammanzahlen der Klassen durch die Funktion  $N\psi$  ausgedrückt, wo  $N$  bedeutet  $\int_{-\infty}^{+\infty} y \cdot dx$  (vgl. (50) und den darauffolgenden Absatz) und  $\psi = \frac{1}{N} \int_{x_2}^{x_1} y \cdot dx$ , so erhalten wir den mittleren Fehler des Klassendurchschnittsdurchmessers  $d_0$ :

$$\varepsilon_{d_0} = \pm \frac{a\sqrt{\Gamma}}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{N\psi}} \dots \dots \dots (71)$$

wo wir der Einfachheit wegen  $(1 - \gamma)^2 + \gamma^2$  mit  $\Gamma$  bezeichnet haben. Es ist nun leicht einzusehen, dass, wenn die Stammanzahl sehr klein ist, in den von dem Durchschnittsdurchmesser  $D_0$  des Bestandes weitest abgelegenen Durchmesserklassen  $\varepsilon_{d_0}$  sehr gross wird, denn  $\psi$  tendiert für von  $D_0$  aus fallendes oder wachsendes  $\varphi$  nach 0 hin. Da wir jedoch nicht weniger als einen ganzen Baum in einer Klasse haben können, so geht hieraus hervor, dass  $\varepsilon_{d_0}$  keine wirkliche Bedeutung in Durchmesserklassen hat, die von  $d_0$  so weit abliegen, dass

$$\int_x^{+\infty} y \cdot dx < 1 \text{ oder } \int_{x=\varphi}^x y \cdot dx < 1.^1$$

Ist nun  $\frac{\pi}{4} d_0^2 = g_0$ , so ist  $\frac{\pi}{2} d_0 \sigma_{d_0} = \sigma_{g_0}$  und:

$$\varepsilon_{g_0} = \pm \frac{\pi}{2} d_0 \frac{a\sqrt{\Gamma}}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{N\psi}} \dots \dots \dots (72)$$

<sup>1</sup> Hier wird abgesehen von der eigentlich auszuführenden Ausschaltung der wenigen Durchmesserstufen innerhalb des so begrenzten Durchmesserintervalls, in denen jedoch kein ganzer Baum vorkommen kann.

Dieser Ausdruck gibt den mittleren Fehler der Grundfläche des Durchschnittsdurchmessers in einer bestimmten Durchmesserklasse an. Für die Summe von  $N\psi$  Stück solcher Grundflächen, also die totale Grundfläche  $G_0$  der Klasse, ist der mittlere Fehler  $N\psi$  mal grösser oder:

$$\varepsilon_{g_0} = \pm \frac{\pi a}{2\sqrt{6}} \cdot d_0 \sqrt{\Gamma N\psi} \dots \dots \dots (73)$$

Für die Grundfläche der Summe mehrerer derartiger Klassen ergibt sich ein mittlerer Fehler, der = der Wurzel aus der Summe der Quadrate der mittleren Fehler der einzelnen Klassen ist, d. h.

$$\varepsilon_{\Sigma G_0} = \pm \frac{\pi a}{2\sqrt{6}} \cdot \sqrt{\Sigma d_0^2 \Gamma N\psi} \dots \dots \dots (74)$$

Diese Formel gibt also die Grösse des mittleren Fehlers der Grundfläche eines ganzen Bestandes an, wobei jedoch zu beachten ist, dass die Grundflächensumme aus den Durchschnittsdurchmessern der Durchmesserklassen berechnet worden ist, dass die Wahrscheinlichkeit positiver und negativer Abweichungen beiderseits von diesen nicht genau gleich ist, wie wir hier angenommen haben, sowie dass die Dimensionsverteilung des Bestandes als einer bestimmten Frequenzkurve, der GAUSS'schen Fehlerkurve, folgend angenommen worden ist. Ferner darf  $\Sigma d_0^2 \Gamma N\psi$  nicht länger berechnet werden, als dass  $\int_x^{+\infty} y \cdot dx = 1$  und  $\int_{x=-p}^x y \cdot dx = 1$  ist.

Wenn in (74) angenommen wird, dass die Funktion  $y = f(\varphi)$  konstant ist, wenn also  $y = \text{Konst.}$ , so erhalten wir  $\gamma = \frac{1}{2}$  und  $\sigma_\varphi = \pm \frac{a}{2\sqrt{3}}$  sowie:

$$\varepsilon_{\Sigma G_0} = \pm \frac{\pi a}{4\sqrt{3}} \cdot \sqrt{\Sigma d_0^2 N\psi} \dots \dots \dots (75)$$

Es ist hier zu bemerken, dass  $\Sigma d_0^2$  = die Summe der Quadrate der Durchschnittsdurchmesser der im Bestande vorhandenen Klassen ist und nicht die Summe aller Durchmesserquadrate des Bestandes. Der ganze Ausdruck unter dem Wurzelzeichen gibt dagegen diese letztere Summe an (vgl. TISCHENDORF).

Multiplizieren wir in (74) die beiden Glieder mit  $\frac{100}{\Sigma G_0}$ , so erhalten wir den prozentualen Grundflächenfehler:

$$\varepsilon_{\Sigma G_0}^{\%} = \pm \frac{100 a \sqrt{\pi}}{\sqrt{6}} \cdot \frac{\sqrt{\Sigma g_0 \Gamma N\psi}}{\Sigma G_0} \dots \dots \dots (76)$$



$\Sigma G_0$  ist hier die Summe der Grundflächen aller Durchmesserklassen, berechnet aus den Durchschnittsdurchmessern.  $\Sigma G_0$  kann also geschrieben werden:  $\Sigma N\phi g_0$ .

Ist nun speziell  $y = \text{Konst.}$ , so erhalten wir:

$$\epsilon_{\Sigma G_0}^{\%} = \pm \frac{100 a \sqrt{\pi}}{2 \sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{\Sigma g_0 n}}{\Sigma G_0} \dots \dots \dots (76 a)$$

Wenn wir in dieser Gleichung  $\Sigma G_0$  gegen  $n \Sigma g_0$  austauschen, wo  $n$  = Anzahl Bäume in der Durchmesserklasse, so erhalten wir die Formel:

$$\epsilon_{\Sigma G_0}^{\%} = \pm \frac{100 a \sqrt{\pi}}{2 \sqrt{3} \cdot \sqrt{\Sigma g_0 n}} \dots \dots \dots (76 b)$$

Hieraus geht hervor, dass der prozentuale Fehler um so grösser ist, je grösser die Klassenweite  $a$  ist, sowie dass er um so kleiner ist, je grösser die Stammanzahl ist und je grössere Dimensionen der Bestand enthält.

Um ein Beispiel von den Fehlerprozenten zu liefern, die nach (76) berechnet werden können, so nehmen wir an, dass wir einen Bestand vor uns haben, dessen Dimensionsverteilung von Niederdurchforstungstypus mit  $p = -3$  und  $\mu = 5$  ist. Der Durchschnittsdurchmesser des Bestandes ist dann za. 15 cm. Wir berechnen mit Hilfe von Wahrscheinlichkeitstabellen den Wert von  $I$  sowie die Schwerpunktsabszissen = theoretischen Durchschnittsdurchmesser der einzelnen Einzentimeterklassen. Die Grundflächen zu diesen werden mit den entsprechenden  $IN\phi$  multipliziert und mit den oben angegebenen Einschränkungen summiert.  $\Sigma G_0$  wird am einfachsten dadurch berechnet, dass man die Durchschnittsgrundflächen der Klassen mit der theoretischen Stammanzahl der Klassen laut Tabelle multipliziert. Wir haben nun alle zur Anwendung von Formel (76) notwendigen Daten.

Für verschiedene Stammanzahlen in dem fraglichen Bestande finden wir nun folgende Fehlerprocente.

$$\begin{aligned} N = 50; \epsilon_{\Sigma G_0}^{\%} &= \pm 0,535 \\ N = 100; \quad \gg &= \pm 0,371 \\ N = 200; \quad \gg &= \pm 0,261 \\ N = 500; \quad \gg &= \pm 0,157 \\ N = 1000; \quad \gg &= \pm 0,116 \end{aligned}$$

Aus dieser Tabelle geht hervor, dass die mittlere Abweichung einer Kluppiierung mit Grundflächenberechnung in Einzentimeterklassen ein ziemlich geringes Prozent der gemessenen Grundfläche beträgt, und dass

die Genauigkeit der Grundflächenberechnung rasch steigt, wenn die Stammzahl zunimmt.

Um eine Vorstellung von der Bedeutung der Stärke des Stammaterials zu erhalten, können wir der Einfachheit wegen annehmen, dass die Dimensionsverteilung konstant ist. Es zeigt sich nämlich, dass die prozentuale Dispersion dabei nicht allzu sehr von der bei normaler Verteilung abweicht, indem für dasselbe Durchmesserintervall wie im vorigen Beispiel die Dispersion bei einer Stammanzahl von 50 und konstanter Frequenzkurve  $=0,52$  (gegen  $0,535$ ) und bei einer Stammanzahl von  $1000=0,10$  (gegen  $0,116$ ) ist. Wollen wir den fraglichen Vergleich völlig rein gestalten, müssen wir mit derselben Anzahl Durchmesserklassen in jedem einzelnen Falle rechnen. Wir wählen daher z. B. die Durchmesserintervalle  $0-10$ ,  $10-20$  und  $20-30$  cm. Für jedes von diesen berechnen wir  $\varepsilon_{\Sigma G_0}^{\%}$  mit Hilfe von (76 b). Wir erhalten für  $n = 5$  (d. h. Summa 50 Bäume) und das Intervall  $0-10$  cm:  $\varepsilon_{\Sigma G_0}^{\%} = 1,41$

$$\begin{array}{ccccccc} & » & & » & 10-20 & » & » = 0,54 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} & » & & » & 20-30 & » & » = 0,34. \end{array}$$

Es zeigt sich also, dass, wie oben erwähnt, ausser der Stammanzahl auch die absolute Stärke der Bäume eine hervorragende Rolle für die Genauigkeit der Grundflächenschätzung spielt, indem der mittlere Fehler mit steigendem Durchmesser sinkt, obgleich die Stammanzahl konstant ist.

Die hier berechneten Dispersionen stimmen recht gut mit den empirischen Resultaten überein, die man dadurch erreicht, dass man teils die Grundfläche einer Anzahl in Millimeter kluppierter Bäume exakt berechnet und teils dieselben Bäume auf Zentimeterklassen verteilt. Wegen der sehr umständlichen Berechnung normaler Frequenzverteilungen ist dieser Typus nicht Gegenstand der Kontrolle gewesen. Dagegen sind einige Flächen mit annähernd konstanter Frequenzverteilung auf oben angeführte Weise berechnet worden. Die Fehlerprozente waren für eine Fläche von:

46 Bäumen:  $+ 0,20 \%$ , berechnet:  $\pm 0,24 \%$

40        »         $- 0,12 \%$         »         $\pm 0,26 \%$

25        »         $+ 0,30 \%$         »         $\pm 0,24 \%$

52        »         $+ 0,60 \%$         »         $\pm 0,58 \%$ .

Zu beachten ist, dass die konstante Frequenzverteilung hier nie völlig verwirklicht worden ist, besonders nicht, was die zweite Fläche betrifft, und dass daher alle die berechneten Dispersionen etwas zu klein sind. Die Differenz, die in Frage kommen kann, ist jedoch nicht gross, und man dürfte somit sagen können, dass die Berechnungen eine sehr gute Übereinstimmung mit empirischen Resultaten aufweisen.

#### IV. Zufällige Abweichungen.

Schon in der vorigen Abteilung haben wir auf das Vorkommen zufälliger Abweichungen bei der Grundflächenbestimmung aufmerksam gemacht. Wir fanden so, dass, wenn die Stammanzahl klein war, die Grundflächensumme eines Bestandes nicht durch Klasseneinteilung ohne einen kleinen Fehler bestimmt werden konnte, der vollständig den Charakter eines zufälligen und somit gesetzmässigen Fehlers hat. Aber auch unabhängig von jeder Klasseneinteilung ist es unmöglich, zufälligen Fehlern beim Kluppieren eines Bestandes zu entgehen. Wie bei allen anderen Messungen ergeben sich verschiedene Werte des gemessenen Gegenstandes. Was die Messung von Durchmessern mit der Kluppe als Instrument betrifft, so verdienen jedoch einige spezielle Umstände Beachtung, Umstände, die dahin wirken, dass die Gesetze der reinen Wahrscheinlichkeitstheorie hier nicht gut zu so klarem Ausdruck kommen können, wie das tatsächlich bei vielen anderen Messungen der Fall ist.

Vor allem ist zu betonen, dass wir voraussetzen, dass die Grundflächen mittelst kreuzweiser Kluppierung in einer durch eine Marke am Stamme fixierten Höhe und in einer durch dieselbe Marke definierten Richtung kluppiert werden. Das Lineal der Kluppe wird nämlich bei der ersten Kluppierung gegen diese Marke angelegt, und der eine Schenkel derselben wird gegen die Marke bei der zweiten angelegt. Bei den Kluppierungen wird der Durchmesser in ganzen Millimetern mit Abrundung nach unten notiert. Wir müssen hieraus den Schluss ziehen, dass die Abweichungen, die eventuell zwischen mehreren Messungen desselben Baumes entstehen, nicht zu überwiegendem Teil reine Beobachtungsfehler sein können, denn um einen ganzen Millimeter kann man sich nur ausnahmsweise beim Ablesen irren. Die Unterschiede, die möglicherweise durch eine fehlerhafte Messhöhe entstehen, müssen gleichfalls von sehr untergeordneter Bedeutung sein. Grösseres Gewicht muss man dagegen Abweichungen von der richtigen Kluppierungsrichtung beilegen, da hierbei das blosse Augenmass darüber entscheiden muss, ob die Kluppierungsrichtung dem Durchmesser durch die Marke am Stamm parallel oder senkrecht dazu ist. Damit ist es klar, dass die Beschaffenheit der Bäume selbst von ausserordentlich grosser Bedeutung für die Grösse der Abweichung sein muss. Bei einer vollkommen kreisrunden Grundfläche ist ja eine Abweichung zwischen den Kluppierungsrichtungen für das Resultat bedeutungslos, das ist aber nicht bei elliptischen oder ovalen Querschnitten der Fall. Ausserdem haben wir mit dem Vorkommen von Rinde zu rechnen, die bekanntlich oft in hohem Grade unregelmässig ausgebildet und ausserdem weich und zusammendrückbar

ist, sowie ferner mit vielen anderen grösseren oder geringeren Unregelmässigkeiten der Peripherielinie, wie Ausbauchungen, die nach Überwallung eines abgestossenen Zweiges entstehen, Rippen, Harzflüssen, Flechten usw. In Wirklichkeit müssen wir das Allermeiste von den Abweichungen auf derartige Ursachen zurückführen. Schon jetzt wollen wir die Aufmerksamkeit auf zwei verschiedene Arten von Abweichungen lenken, die zwar beide auf im grossen und ganzen derselben Ursache beruhen, die aber doch, obwohl ohne scharfe Grenzen, sich voneinander durch die Grösse unterscheiden. Haben wir es nämlich mit einem Baum zu tun, der mit einer mehr hervortretenden Unregelmässigkeit, nehmen wir beispielsweise an mit einem überwallten Astknorren in der Nähe eines der Anlegungspunkte der Kluppe, behaftet ist, so ist es ganz natürlich, wenn von, sagen wir, 10 Messungen 9 sehr wenig voneinander abweichen, während die 10. Messung einen bedeutend grösseren Wert als die übrigen ergibt. Dies kann nämlich darauf beruhen, dass man bei dieser Kluppierung zufälligerweise den fraglichen Astknorren berührt hat. Es ist zwar ein Zufall, der auf diese Weise mitspielt, aber die Wirkung davon kann unverhältnismässig gross sein. Derartige Abweichungen springen aus der Kette der übrigen Abweichungen heraus und müssen als Anomalien betrachtet werden, mit denen wir freilich rechnen müssen, die aber eine eventuelle Gesetzmässigkeit bei den übrigen stören können. Eine Eigentümlichkeit bei diesen Abweichungen ist es ferner, dass sie sehr oft positiv sind. Es geschieht nämlich mehr selten, dass man Gruben oder andere ähnliche Momente antrifft, die zu kleine Werte verursachen, während das Gegenteil oft vorkommt. Auch grosse negative Abweichungen müssen jedoch vorkommen, nur nicht so oft. Wozu diese speziellen Verhältnisse führen können, wird weiter unten gezeigt werden.

Um die zufälligen Grundflächenabweichungen zu studieren, sind 8 Kiefernbestände und 1 Fichtenbestand zu wiederholten Malen kreuzweise kluppiert worden. Jeder einzelne Bestand wurde von derselben Person kluppiert, und die Anzahl der Kluppierungen betrug 10. Folglich finden sich für jeden Baum 10 Werte der Grundfläche, bestimmt als die Grundfläche für das arithmetische Mittel der beiden Durchmesser. In der Regel enthielt jeder Bestand 100 Bäume. Das Mittel der 10 Grundflächenwerte für jeden einzelnen Baum wurde berechnet, und die Abweichungen der einzelnen Messungen von diesem Mittel wurden notiert. Die so erhaltenen Abweichungen liegen nun in Gruppen von je 10 Stück vor, und jede Gruppe gehört zu einem bestimmten Baum. Nun sind alle Bäume in jeder Fläche auf die Grundflächengruppen 0—0,010, 0,010—0,020, 0,020—0,030 m<sup>2</sup> usw. verteilt worden. Es ist leicht ersichtlich,

dass die Abweichungen, die so in jeder derartigen Grundflächengruppe vorkommen, keine statistische Reihe bilden. Berechnen wir aber die Abweichungen innerhalb jeder Zehnergruppe als Prozente der mittleren Grundfläche der Zehnergruppe, so erhalten wir dagegen eine Reihe prozentualer Abweichungen, von denen man erwarten kann, dass sie innerhalb jeder Grundflächengruppe eine heterograde statistische Reihe bilden.<sup>1</sup> Das Mittel dieser Reihe muss offenbar 0 sein.

Tab. 2. Das ganze Kiefernmaterial auf Grundflächenklassen verteilt.  
Hela tallmaterialet i grundlyteklasser.

Grund- flächen- klasse Grund- lyte- klass	Prozentuale Abweichungen (Procentuella avvikelser)																$x^2 \cdot y$	$N$	$\sigma$
	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	+1	+2	+3	+4	+5	+6	+7				
O,000—10	2	2	—	12	21	90	237	619	167	82	41	17	1	4	5	2 698	1 300	1,44	
O,010—20	1	—	—	5	12	67	261	453	194	79	20	3	1	1	3	1 712	1 100	1,25	
O,020—30	—	—	—	1	6	59	289	573	227	62	7	3	2	—	1	1 280	1 230	1,02	
O,030—40	—	—	—	1	8	32	261	466	206	38	7	8	2	1	—	1 112	1 030	1,04	
O,040—50	—	1	1	3	6	25	199	485	160	37	7	5	1	—	—	938	930	1,00	
O,050—60	—	—	—	1	6	13	142	411	145	27	3	1	—	—	1	609	750	0,90	
O,060—70	—	—	—	—	1	9	136	287	105	19	2	1	—	—	—	396	560	0,84	
O,070—80	—	—	1	—	3	13	75	200	83	13	1	1	—	—	—	339	390	0,93	
O,080—90	—	—	—	—	2	6	34	124	29	3	—	2	—	—	—	149	200	0,86	
O,090—100	—	—	—	—	1	1	12	43	11	2	—	—	—	—	—	44	70	0,79	
O,100—110	—	—	—	—	—	—	5	38	6	1	—	—	—	—	—	15	50	0,55	
O,110—120	—	—	—	—	—	1	5	7	5	1	1	—	—	—	—	27	20	1,16	
$\Sigma$	3	3	2	23	66	316	1 656	3 706	1 338	364	89	41	7	6	10	—	7 630	—	

Innerhalb einer jeden der verschiedenen Grundflächengruppen wird nun die prozentuale mittlere Abweichung  $\sigma_g$  berechnet. Es zeigt sich, dass dieselbe Grundflächenklasse auf verschiedenen Flächen ziemlich gleiches  $\sigma_g$  haben, und daher sind alle Flächen grundflächenklassenweise vereinigt worden. Ein Detailstudium der Flächen, die sowohl in Nord- wie in Mittel- und in Südschweden liegen, liefert keine Aufschlüsse von Wert.

Das Material liegt nun in Form von 12 Serien gemäss Tab. 2 vor. Die Übereinstimmung zwischen diesen Serien und der normalen Frequenzkurve ist untersucht worden. Ein typisches Beispiel (Grundflächenklasse 0,020—0,030) wird in Fig. 15 wiedergegeben. Diese Verteilung kehrt mehr oder weniger deutlich in sämtlichen Grundflächenklassen wieder.

Wir finden hier, dass die Frequenzverteilung einen augenfälligen positiven Exzess ( $+0,213 \pm 0,017$ ) aufweist, sowie eine negative Asymmetrie ( $-0,141 \pm 0,035$ ), die gleichfalls als sicher konstatiert anzusehen ist. Um dieses Verhältnis zu erklären, erinnern wir uns daran, dass wir das Vor-

<sup>1</sup> Vgl. Nachtrag, S. 300.

kommen zweier verschiedener Fehlertypen vorausgesehen haben, sowie dass diese beiden in gewissem Grade voneinander abhängen. Ist dem so, dass gewisse Unregelmässigkeiten und Anomalien in der Stampperipherie vorkommen und grosse Fehler verursachen, welche ausserdem in überwiegendem Grade positiv sind, so erklärt sich sowohl die Asymmetrie als auch der Exzess hierdurch auf ungesuchte Weise. Für jeden derartigen einzelnen grossen positiven Fehler innerhalb einer Zehnergruppe entsteht nämlich automatisch eine grosse Anzahl kleiner negativer Fehler, da ja das Mittel in der Nähe der die Mehrzahl bildenden fast gleich grossen Grundflächen zu liegen kommen muss. So kommt es, dass die kleinen Fehler überhaupt überzählig sind, daher der Exzess, und ferner werden kleine negative Fehler relativ zahlreicher als kleine positive

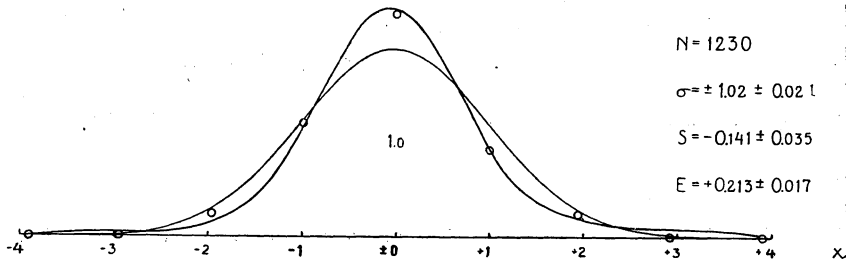


Fig. 15. Die Verteilung der Abweichungen in der Grundflächenklasse 0,020—0,030 m<sup>2</sup>.  
Fördelningen av avvikelserna i grundtycklassen 0,020—0,030 m<sup>2</sup>.

Fehler, daher die Asymmetrie. Man könnte sich versucht fühlen, die beiden Frequenzkurven, aus denen die diskutierte Kurve demnach zusammengesetzt sein muss, zu separieren, es ist dies aber, wie leicht ersichtlich, eine sehr schwierige Sache. Wir vermuten nämlich auf Grund der Natur der grossen Fehler — und eine Stütze für diese Vermutung liefert auch Tab. 2. —, dass die Frequenzkurve derselben nicht normal ist, sondern eine positive Asymmetrie besitzt, und dass ferner, was noch wichtiger ist, die grossen Fehler und die kleinen voneinander abhängen. Mit jedem grossen Fehler, der eliminiert wird, ändern wir auch die Verteilung der kleinen Fehler. Die einzige Aussicht, einigermaßen richtig die Kurven voneinander zu scheiden, bestände darin, dass man auf das Primärmaterial zurückginge und dort entweder die ganzen Zehnergruppen, in denen eine abnorm grosse Abweichung vorkommt, oder auch nur diese Abweichung ausschiede, wobei die übrigen Abweichungen nach neuer Mediumsberechnung erneut zu berechnen wären. Hier stossen wir jedoch auf die Schwierigkeit, dass wir nicht wissen, was normal und was abnorm ist. Es wäre ein vollständig willkürliches Ausscheiden grosser Abweichungen ohne die geringsten Anhaltspunkte für ihre untere Grenze.

Leider müssen wir daher auf eine nähere Analyse der entstehenden Frequenzkurven verzichten.

In Tab. 2 zeigt es sich, dass  $\sigma_g$  am grössten in der niedrigsten Grundflächenklasse ist, und dass es ziemlich deutlich mit steigender Grundflächenklasse abnimmt. Der prozentuale Fehler wird also um so kleiner, je grösser die Bäume sind. Der Zusammenhang zwischen der Dispersion und der Grundfläche scheint krummliniger Natur zu sein. Wird dagegen die Dispersion mit dem Durchmesser in Zusammenhang gebracht, so

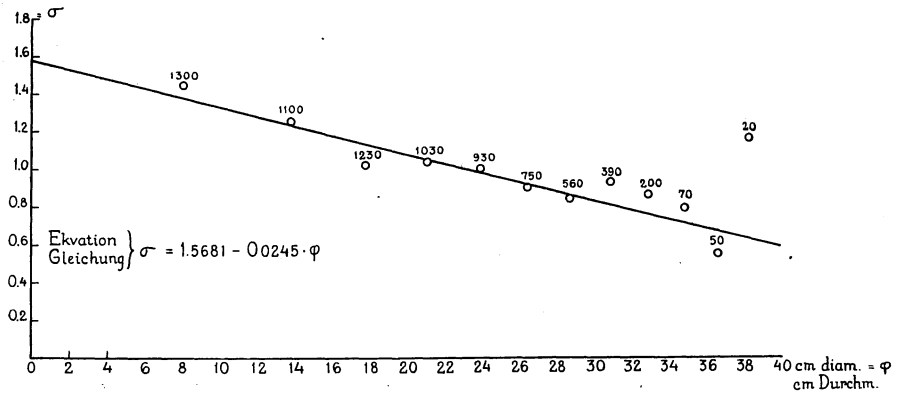


Fig. 16. Die Beziehung zwischen der Dispersion und dem Brusthöhendurchmesser, Kiefer.  
Sambandet mellan dispersionen och brösthöjdsdiametern, tall.

ergibt sich eine Kurve, die in hohem Grade sich einer Geraden zu nähern scheint. Werden nun die  $\sigma_g$ -Werte mittels der Methode der kleinsten Quadrate ausgeglichen, so erhalten wir folgende Gleichung, wo  $\varphi$  = der Durchmesser (vgl. Fig 16):

$$\sigma_g = 1,5681 - 0,0245 \varphi \dots\dots\dots (77)$$

Wir können nun ausrechnen, dass, wenn wir  $N$  Stück gleich starke Kiefern von, sagen wir, 10 cm Durchmesser kluppieren, ihre Grundflächensumme  $G$  mit einem mittleren Fehler:

$$\varepsilon_G = \pm \frac{1,5681 - 0,0245 \cdot 10}{\sqrt{N}} = \pm \frac{1,3231}{\sqrt{N}} \%$$

behaftet ist.

Sind die Bäume stattdessen 20 cm stark, so ist der mittlere Fehler:

$$\pm \frac{1,0781}{\sqrt{N}} \%$$

Beträgt der Durchmesser 30 cm, so ist der mittlere Fehler:  $\pm \frac{0,8331}{\sqrt{N}} \%$ .

Wählen wir hier  $N = 100$ , so erhalten wir als mittlere Fehler der Summe von 100 St. 10, 20 und 30 cm starken Bäumen bezw.  $\pm 0,13$ ,  $\pm 0,11$  und  $\pm 0,08$  %.

Diese Fehlerprozentente unterscheiden sich so unbedeutend voneinander, dass wir später, um eine Vorstellung von dem mittleren Fehler bei der Kluppierung eines Bestandes mit einer bestimmten Dimensionsverteilung zu erhalten, es nicht als nötig erachten, mit der variablen Dispersion zu rechnen, sondern stattdessen die Dispersion für den mittleren Durchmesser des Bestandes als Mittel für den ganzen Bestand akzeptieren.

Nun wissen wir, dass die Fehlerprozentente, die die Varianten in unseren statistischen Reihen bilden, Prozente sind, die sich auf das Mittel der Mitglieder der verschiedenen Zehnergruppen beziehen. Folglich sind sowohl  $\sigma_g$  als  $\varepsilon_G$  gleichfalls Prozente, die sich auf Mittelwerte beziehen.

(Es wird hier der Einfachheit halber  $\sigma_g$  und  $\varepsilon_G$  statt  $\frac{\%}{\sigma_g}$  und  $\frac{\%}{\varepsilon_G}$  geschrieben, da ein Missverständnis kaum zu befürchten ist). Wenn wir aber einen Bestand nur einmal kluppieren, so erhalten wir keinen Mittelwert, sondern nur eine Beobachtung. Auf diese einzelne Beobachtung können wir also, streng genommen, nicht die von uns gefundenen  $\sigma_g$ -Werte anwenden, denn diese beziehen sich auf das Mittel aus vielen Beobachtungen. Da jedoch unsere  $\sigma_g$ -Werte kleine Prozente sind, so können wir, ohne das Resultat erheblich zu verrücken, von dieser Schwierigkeit absehen und die Werte ohne weiteres auch auf einzelne Beobachtungen anwenden. Bezeichnen wir nämlich das Mittel aus mehreren Beobachtungen mit  $M$  und eine einzelne Beobachtung mit  $V$  sowie die von uns berechnete, auf  $M$  bezügliche Dispersion mit  $\sigma$  und die auf  $V$  bezügliche mit  $\sigma_x$ , so ist im Mittel:  $M \pm 0,0 \sigma M = V$ . Wir wissen aber auch, dass  $0,0 \sigma M = 0,0 \sigma_x V$ , und folglich erhalten wir aus diesen beiden Relationen:

$$0,0 \sigma_x = \frac{0,0 \sigma}{1 \pm 0,0 \sigma} \dots \dots \dots (78)$$

Ist nun  $\sigma$  ein kleines Prozent, z. B. 1,0, so geht aus (78) hervor, dass  $\sigma_x$  unbedeutend von  $\sigma$  abweicht.

Die generelle, etwas approximierte Formel für den prozentualen mittleren Fehler der Summe der Grundflächen bei baumweiser Berechnung der Grundfläche ist, wenn  $N$  = Anzahl in der Summe enthaltener Bäume und  $\varphi_0$  = mittlerer Durchmesser des Bestandes:

$$\varepsilon_G^{\%} = \pm (1,5681 - 0,0245 \varphi_0) \cdot \frac{\sqrt{\sum g^2}}{G} \text{ oder sehr approx. } \pm \frac{1,5681 - 0,0245 \varphi_0}{\sqrt{N}} \quad (79)$$

welche Gleichung bis auf weiteres für Kiefer gilt.



Betreffs der Fichte kann nur gesagt werden, dass die einzige Fläche, die untersucht worden ist, einen  $\sigma_s$ -Wert von  $\pm 1,3353 \pm 0,0299$  % ergab, sowie dass die Tendenz zu sinkendem  $\sigma_s$  mit steigender Grundfläche auch hier vorhanden ist.

Bevor wir diese Frage verlassen, muss ferner betont werden, dass die statistischen Reihen, die wir für den Kluppierungsfehler erhalten haben, nicht normale Wahrscheinlichkeitskurven bilden. Die Verteilung, die wir gefunden haben, ist nicht nur ein Ausdruck eines reinen Zufalls, sondern in wesentlichem Grade auch ein Ausdruck gewisser morphologischer Eigenschaften der Bäume. Die Dispersionen, die hier berechnet worden sind, haben daher Wert nur insoweit, als unser Material als repräsentativ für die Eigenschaften der betreffenden Baumarten in für die Frage wichtigen Hinsichten angesehen werden kann.

Bei der Behandlung der Umfangmessung in Kap. II wurde erwähnt, dass sie wegen eines besonderen Umstandes mitberücksichtigt worden ist. Es ist dies die Vermutung, dass der mittlere Fehler bei Umfangmessung beträchtlich geringer sein kann als bei Kluppierung. Wird nämlich der Durchmesser eines Baumes mit  $\varphi$  und seine Peripherielinie mit  $s$  bezeichnet, so ist  $\frac{\pi}{4} \varphi^2 = \frac{s^2}{4\pi}$ . Wird dieser Ausdruck deriviert, so erhalten wir, nachdem  $\varphi$  durch  $\frac{s}{\pi}$  ersetzt worden ist:

$$\pi d\varphi = ds \dots \dots \dots (80)$$

Eine Abweichung der Peripherielinie um einen gewissen Betrag  $ds$  entspricht demnach einer Abweichung des Durchmessers, die  $\frac{1}{\pi}$  mal so gross ist. Soll die Grundflächenabweichung gleich gross in beiden Fällen sein, so muss die Abweichung der Peripherielinie  $\pi$  mal so gross sein als die des Durchmessers, und es muss daher leichter sein, die Grundfläche des Baumes exakt durch Umfangmessung als durch Kluppierung zu messen.

Es zeigt sich auch bei einer Untersuchung, dass dies der Fall ist, wenigstens bis zu einem gewissen Grade. Eine Fläche wurde nämlich viermal kluppiert (allerdings von verschiedenen Personen, weshalb systematische Fehler im Spiele gewesen sein können). Die Dispersion war  $\pm 1,58$  %. Dieselbe Fläche wurde durch 6-malige Umfangmessung seitens derselben vier Personen bestimmt, und die Dispersion war nun  $\pm 0,67$  %. Dieser Vergleich hinkt etwas, da der Dispersion der Kluppierung und der Umfangmessung verschiedene Anzahlen Messungen zugrunde liegen,

aber es ist doch vollkommen sicher festgestellt, dass die Umfangmessung eine geringere Dispersion als die Kluppierung ergibt, wenn sie auch nicht völlig ihren theoretischen Wert erreicht. Jedoch ist die Dispersion der Umfangmessung immer noch so gross, dass es zweifelhaft ist, ob diese Methode als eine Normalmethode, wie sie oben besprochen worden ist, empfohlen werden kann.

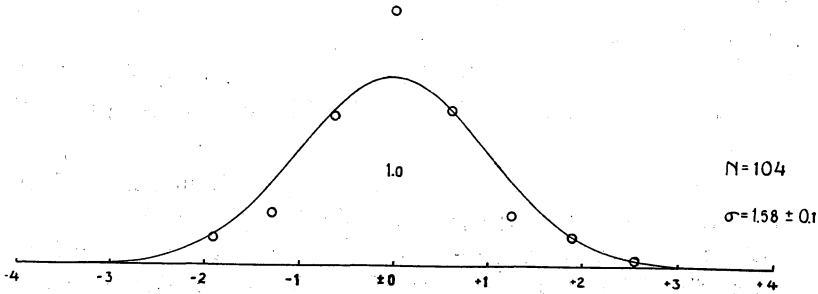


Fig. 17. Die Verteilung der Abweichungen bei Kluppierung.  
Avvikelsernas fördelning vid klavning.

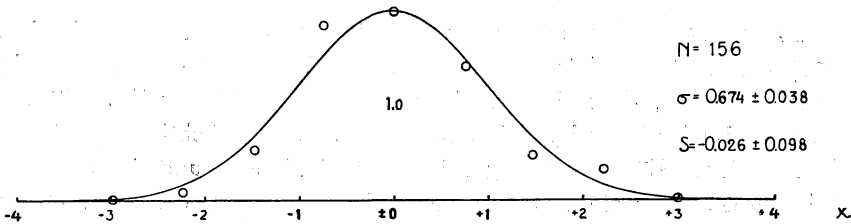


Fig. 18. Die Verteilung der Abweichungen bei Umfangmessung.  
Avvikelsernas fördelning vid omkretsmätning.

In Fig. 17 und 18 wird die Verteilung der Fehler bei Kluppierung und bei Umfangmessung im Vergleich mit der normalen Frequenzkurve gezeigt. Es ist bemerkenswert, dass, obwohl die Kluppierung einen bedeutenden Exzess wie früher aufweist, bei der Umfangmessung kein Exzess wahrnehmbar ist. Bei der Erklärung, die wir früher für die Entstehung des Exzesses geliefert haben, ist dies auch ganz natürlich, denn auf eine sorgfältig ausgeführte Umfangmessung müssen vorkommende Unregelmässigkeiten stets in ungefähr gleichem Grade Einfluss ausüben, und speziell grosse Abweichungen müssen hier also verhältnismässig selten sein.

## V. Einige empirische Untersuchungen.

Bei Kluppierung von Probeflächen zu wissenschaftlichen Zwecken muss es als eine gute Regel betrachtet werden, dass die Messung von derselben Person durch die ganze Fläche hin ausgeführt wird. Aus vielen

praktischen Gründen ist es jedoch zur Gewohnheit geworden, diese Vorsichtsmassregel nur bei der Kluppierung des Brusthöhenmasses an den stehenden Bäumen vor dem Durchforstungseingriff zu beobachten. Die später gefällten Durchforstungsstämme, die als Probestämme angewandt werden, sind in der Regel von anderen Personen, oft mehreren zugleich, kluppirt und sektioniert worden. Um festzustellen, ob dieses sozusagen persönliche Moment etwas zu bedeuten haben kann, sind eine Anzahl Grundflächenmessungen ausgeführt worden.

Als erstes Beispiel sei hier eine Kiefernfläche erwähnt, die 166 Bäume mit einer Grundfläche von im Mittel dreier Messungen  $4,3003 \text{ m}^2$  enthält. Das  $\sigma_g$  dieser Fläche ist  $= \pm 1,34 \%$ , und folglich ist  $\varepsilon_g = \pm 0,104$ . Die drei von derselben Person ausgeführten Kluppierungen ergaben die Werte:  $4,3114$ ,  $4,2924$  und  $4,2971 \text{ m}^2$ . Die Kluppierungen weichen von dem Mittel um bezw.  $+ 0,26$ ,  $- 0,18$  und  $- 0,07 \%$  ab. Es zeigt sich also, dass sämtliche Kluppierungsergebnisse innerhalb der Grenzen des dreifachen mittleren Fehlers liegen. Nun ist zu beachten, dass, da die Verteilung der Abweichungen nicht völlig normal war, es auch nicht sicher ist, dass die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers  $> 3$  mal  $\varepsilon_g = 0$  (richtiger 3:1000) ist. Indessen können wir doch mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit vermuten, dass Fehler, die den dreifachen Betrag des mittleren Fehlers erheblich übersteigen, demungeachtet sehr verdächtig sein müssen.

Eine andere Fläche mit 183 Bäumen und einer Grundfläche von im Mittel  $3,4692 \text{ m}^2$  wurde von drei verschiedenen Personen  $A$ ,  $B$  und  $C$  kluppirt. Die Resultate waren bezw.  $3,4766$ ,  $3,4680$  und  $3,4630 \text{ m}^2$ , mit Abweichungen vom Mittelwert bzw.  $\pm 0,21$ ,  $- 0,03$  und  $- 0,18 \%$ . Das  $\varepsilon_g$  der Fläche ist  $= \pm 0,087 \%$ . Obwohl ein Vergleich zwischen diesen Ziffern nicht einwandfrei ist, da wir ja die wahre Grundfläche des Bestandes nicht kennen, so können wir doch sicher sein, dass, wenn eine systematische Abweichung bei einer Messperson auf diese Weise hervortritt, das Vorkommen eines systematischen Fehlers sehr wahrscheinlich ist, denn es ist wenig wahrscheinlich, dass ein Fehler mit der Wahrscheinlichkeit  $\sim \frac{3}{1000}$  in den 3 ersten Fällen auftritt. Es zeigt sich in diesem Falle, dass die Resultate sämtlicher Messpersonen innerhalb der Grenzen des dreifachen mittleren Fehlers liegen. Doch kommt die Kluppierung des  $A$  dem Höchstwert recht nahe.

Eine dritte Fläche wurde von den Personen  $A$ ,  $B$ ,  $C$  und  $D$  kluppirt. Die Fläche enthielt 26 Bäume mit einer mittleren Grundfläche von  $1,4103 \text{ m}^2$ .  $\varepsilon_g$  der Fläche  $= \pm 0,31 \%$ . Die vier Kluppierungen wichen von dem Mittel um bzw.  $+ 0,14$ ,  $- 0,26$ ,  $+ 0,84$  und  $- 0,73 \%$  ab. Auch

in diesem Falle liegt keine Kluppierung ausserhalb der Grenzen des dreifachen mittleren Fehlers, obwohl *C* und *D* beide demselben sehr nahe kommen. Zweifellos ist der Verdacht berechtigt, dass die Kluppierungen dieser beiden Personen sich durch einen persönlichen Faktor voneinander unterscheiden. Wir können vermuten, dass *D* die Kluppe ziemlich fest andrückt, während *C* eine recht leichte Hand hat. In diesem Falle kann Gewissheit erlangt werden, indem wir die Person *D* identifizieren können: sie ist der Verfasser dieses Aufsatzes. Er ist sich nämlich bewusst, in diesem Falle die Kluppe etwas mehr als nötig angedrückt zu haben, eben in der Absicht, zu sehen, ob dadurch eine systematische Abweichung verursacht würde. Es ist nun aber nicht so, dass die Schenkel der Kluppe mit grösserer Kraft gegeneinander gepresst worden wären, es handelt sich nur um eine etwas grössere Festigkeit im Anlegen als gewöhnlich.

Dieselbe Fläche wurde von denselben 4 Personen durch Umfangmessung bestimmt. Der mittlere Fehler ist in diesem Falle  $\pm 0,13$  %, und die 4 Messungen weichen um bzw.  $+ 0,16$ ,  $+ 0,10$ ,  $+ 0,19$  und  $- 0,44$  % ab. Hier liegt die Messung von *D* ausserhalb der Grenzen des dreifachen mittleren Fehlers, und da der Messende (Verf.) auch jetzt mehr Stärke beim Messen als die übrigen verwendete, so muss dieser Umstand beweisen, dass ein systematischer Fehler hier wirklich vorliegt. Bemerkenswert ist, dass auch in diesem Falle *C* sich als die leichteste Hand habend erwiesen hat. Erwähnt sei, dass die Personen *A*, *B* und *C* keinerlei Instruktionen erhalten hatten und von dem Zweck des Versuches nicht unterrichtet waren.

Aus den Versuchen ergibt sich, dass unzweifelhaft ein persönlicher Unterschied zwischen verschiedenen Messpersonen besteht, der in ihrem Kluppierungsergebnis zum Ausdruck kommen kann. Wie kräftig dieses systematische, persönliche Moment im Mittel wirken kann, ist ohne weitläufige Untersuchungen unmöglich festzustellen.

Dagegen kann man mit grösster Leichtigkeit herausfinden, einen wie grossen Einfluss es überhaupt haben kann. Indem man dieselbe Person einen Bestand dreimal kluppieren liess, mit der Vorschrift, zuerst die Kluppe sehr leicht, das nächste Mal normal und zuletzt kräftig anzulegen, zeigte es sich, dass die erste Kluppierung um  $+ 1,60$  %, die zweite um  $- 0,10$  % und die letzte mit  $- 1,50$  % von dem Mittel abwich. Der Unterschied zwischen der leichten und der kräftigen Kluppierung beträgt also nicht weniger als  $3,1$  % von der durchschnittlichen Grundfläche des Bestandes.

Derselbe Versuch wurde mit zwei verschiedenen Personen wiederholt, wobei der einen vorgeschrieben wurde, die Kluppe an den Baum leicht

anzulegen, der anderen, sie fest gegen den Stamm anzudrücken. Die beiden Personen führten je drei Kluppierungen aus. Von dem Mittel aus den sechs Kluppierungen wich das Mittel aus den dreien mit leichtem Anlegen um  $+ 1,69\%$  und das Mittel aus den dreien mit kräftigem Anlegen um  $- 1,69\%$  ab. Der Unterschied betrug hier also  $3,4\%$ .

In noch einem anderen Bestande ergab sich dieser Unterschied zu  $3,5\%$ .

Es ist ganz sicher, dass so grosse Unterschiede zwischen verschiedenen Messpersonen, wie sie sich hier ergeben haben, nicht riskiert werden, sofern diese überhaupt im Handhaben der Kluppe geübt sind, oder wenn sie die nötigen Instruktionen erhalten. Die Untersuchung zeigt aber, dass ein persönliches Moment doch ziemlich kräftig wirken kann, und dass es notwendig ist, bei einer wichtigen Vermessung unbekannte Kluppierer zu beobachten, um eventuelle Eigentümlichkeiten derselben zu berichtigen.

Es hat sich bei mehreren Gelegenheiten gezeigt, dass man verschiedene Werte der Grundfläche erhält, wenn eine Anzahl Bäume zuerst stehend und dann, unmittelbar nachdem sie gefällt worden, auf dem Boden liegend kluppiert werden, und dies obwohl die Kluppierung in beiden Fällen in der Form von kreuzweiser Kluppierung an einem und demselben am Stamme markierten Punkt geschehen ist.

So wurden beispielsweise 91 Kiefern von derselben Person zuerst stehend und dann liegend kluppiert; die letztere Kluppierung ergab ein um  $1,07\%$  geringeres Resultat als die erstere. In einem anderen Falle wurden 36 Kiefern kluppiert, und die »liegende« Grundfläche war nun  $0,58\%$  grösser. In mehreren Fällen, wobei verschiedene Personen die Bäume stehend und liegend gemessen hätten, wurden Unterschiede erhalten, die bisweilen einen sehr hohen Betrag aufweisen konnten. Es seien hier einige der erhaltenen Werte angeführt, alle in  $\%$  der an stehenden Bäumen gemessenen Grundfläche. 75 Kiefern:  $+ 0,10$ ; 98 Kiefern:  $- 1,94$ ; 60 Kiefern:  $- 1,66$ ; 21 Kiefern:  $- 0,53$ ; 10 Kiefern:  $+ 0,03$ ; 13 Kiefern:  $+ 0,02$ ; 15 Kiefern:  $- 0,13$ ; 19 Kiefern:  $+ 0,11$ ; 37 Kiefern:  $- 2,68$ ; 36 Kiefern:  $- 4,41$ ; 36 Kiefern:  $- 5,60$ ; 19 Kiefern:  $- 1,37$ ; 71 Fichten:  $+ 2,31$ ; 44 Fichten:  $- 0,79$ .

Die Ursache eines Teiles dieser grossen Abweichungen kann offenbar nicht lediglich in einem persönlichen Moment gesucht werden. Wäre die kreuzweise Kluppierung richtig ausgeführt worden, d. h. wären die Durchmesser in beiden Fällen wirklich senkrecht gegeneinander gewesen, so würden viele von diesen Abweichungen völlig unerklärlich sein. Nun kann man jedoch mit grösster Sicherheit behaupten, dass, wenn die Bäume auf dem Boden liegen, die kreuzweise Kluppierung weniger sorgfältig ausgeführt wird, indem der Winkel zwischen den beiden Kluppierungen

unter  $90^\circ$  herabsinkt. Wenn das Achsenverhältnis der Bäume einen erheblicheren Betrag darstellt, muss daher das Kluppierungsergebnis für die liegenden Bäume beträchtlich von dem Resultat für die stehenden abweichen; ob es grösser oder kleiner ausfällt, hängt davon ab, wie der grösste Durchmesser der gefällten Bäume im Mittel sich im Verhältnis zum Boden orientiert hat. Ist das Achsenverhältnis  $0,95$ , also recht gross, so kann im ungünstigsten Falle die Messung für jeden liegenden Baum zu einem *z. B.*  $5\%$  zu hohen Werte führen. Ist das Achsenverhältnis  $0,90$ , so kann dieser Fehler auf *z. B.*  $11\%$  steigen. Da es sich indessen schwerlich denken lässt, dass bei allen Bäumen der grösste Durchmesser zufälligerweise parallel dem Boden und der Winkel zwischen den Kluppierungen doch nicht  $0^\circ$  ist, so hat man natürlich mit beträchtlich geringeren Beträgen zu rechnen. Auch wenn wir nur die Hälfte ansetzen, muss schon ein übler Zufall recht kräftig mitgespielt haben. Als theoretisch erklärlich können wir demnach Unterschiede bis hinauf zu höchstens etwa  $5\%$  ansehen, und alle die konstatierten Prozente, ausser einem, sind auch kleiner als  $5$ . Wahrscheinlich trägt auch das persönliche Moment zu den Unterschieden bei.<sup>1</sup>

## VI. Beispiele und Zusammenfassung.

Versuchen wir nun, endgültig den Fehlerbetrag für die definitive Endsumme zu berechnen, zu dem sämtliche bisher behandelten Fehlermöglichkeiten bei der Grundflächenschätzung eventuell führen können, so wird diese Berechnung zweifellos einen Mindestwert des Fehlers ergeben. Wir sind nämlich von gewissen Voraussetzungen ausgegangen, welche geeignet sind, die Fehlermöglichkeiten zu verringern. So verhält es sich wahrscheinlich mit unserer Annahme elliptischer oder ovaler Querschnitte und einer somit völlig eindeutigen Peripherielinie. Wir haben auch von reinen Instrumentfehlern abgesehen, die doch in Wirklichkeit vorkommen können, und haben auch grobe Fehler unberücksichtigt gelassen, wie sie bisweilen auf unberechenbare Weise ein Messresultat entstellen können.

Von diesen Verhältnissen abgesehen, können wir die Grundflächenmessung einigermaßen beherrschen. Nehmen wir an, wir sollen die Grundfläche auf einer Probestrache von Kiefern, auf der 100 Bäume stehen, messen. Die Dimensionsverteilung sei von normalem Niederdurchforstungstyp ( $p = -3$ ) und der durchschnittliche Durchmesser der Fläche  $= D_0 = 15,0$  cm. Ihr mittlerer Durchmesser ist dann  $15,8$  cm  $= \varphi_0$ . Wir nehmen an, dass die Grundflächen Ellipsen mit einem durchschnittlichen Achsenverhältnis von  $\beta = 0,90$  und mit einer nicht orientierten grossen

<sup>1</sup> Denkbare ist natürlich auch, dass grobe Messfehler mitgespielt haben können.

Achse sind, und setzen ferner voraus, dass die Kluppierung an einer Marke am Stamme geschieht, und dass kreuzweise kluppirt wird. Der Durchschnittsdurchmesser jedes Stammes werde als das arithmetische Mittel aus den beiden in Millimetern mit Abrundung nach unten gemessenen Durchmessern berechnet. Wir denken uns nun, dass die Grundflächen-summe der Fläche dadurch erhalten wird, dass wir nach dem Durchschnittsdurchmesser die Stämme auf Zentimeterklassen verteilen, wobei die Grundflächenberechnung nach dem Klassenmitteldurchmesser geschieht.

Geschieht nun die Schätzung z. B. im August, so kann die Temperatur ebensowohl  $+10^{\circ}\text{C}$  wie  $+20^{\circ}\text{C}$  betragen. Nehmen wir ganz willkürlich an, dass die Grundfläche bei  $+15^{\circ}\text{C}$  als normal betrachtet wird, sowie dass zwei Kluppierungen, die eine bei  $+20^{\circ}$  und die andere bei  $+10^{\circ}$ , vorgenommen werden, so erhalten wir folglich auf Grund der oben mitgeteilten Ziffern zwei Temperaturkorrekturen:  $k_t = 0,99950$  bzw.  $1,00050$ .

Geschieht die Messung früh am Tage oder spät am Abend, so erhalten wir bekanntlich verschiedene Werte. Wir müssen daher eine Normalzeit annehmen und wählen da 11 Uhr, da dieser Zeitpunkt ungefähr mitten zwischen den Zeitpunkten für den grössten und den kleinsten Wert des Durchmessers in der Tagesperiode liegt. Geschieht die erste Messung bei  $+20^{\circ}$  ausserdem um 8 Uhr, so erhält man einen Korrektionsfaktor für die Transpiration  $k_r = 0,99925$ , wenn wir den Gesamtunterschied zwischen grösster und kleinster Grundfläche für August als  $0,15\%$  (Prozent des Mittelwertes) annehmen. Geschieht die zweite Messung um 14 Uhr, so erhalten wir  $k_r = 1,00075$ .

Auf Grund der Berechnungsmethode für die Durchschnittsdurchmesser der Bäume erhalten wir nach (24)  $k_m^{\text{III:2}} = 0,99585$ , gleich für beide Messungen. Da in diesem Beispiel der mittlere Fehler des  $k_m^{\text{III:2}}$  nicht unberücksichtigt bleiben darf, berechnen wir folgendermassen in sehr vereinfachter Weise das zugehörige  $\varepsilon$ . Der grösste Wert von  $k^{\text{III:2}}$  (18)\* wird mit  $k_1$ , der kleinste (19) mit  $k_2$  bezeichnet. Ferner setzen wir  $\frac{1}{2}(k_1 + k_2) = k_3$

und vereinfacht  $k_m^{\text{III:2}} = k_m$ . Der mittlere Fehler ist aus:  $\sigma^2 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (k_v - k_m)^2 dv$

zu berechnen, wo  $k_v$  gemäss (17) erhalten wird. Diese Funktion wird angenähert durch  $k_v = k_3 + (k_1 - k_3) \cos 4v$  ersetzt. Dann erhält man:  $\sigma^2 = (k_m - k_3)^2 + \frac{1}{4}(k_1 - k_3)^2$  oder, da  $k_m = k_3$  (auf 5 Stellen genau),

$\sigma = \pm \frac{1}{2}(k_1 - k_3)$ . In diesem Falle wird  $\sigma = \pm 0,00069$  und  $\varepsilon = \pm 0,00007$ .

Nach (62) erhalten wir für die Millimeterabrundung, gleich für beide Kluppierungen, eine Korrektur  $k = 1,00600$ .

Nach der Tabelle auf S. 274 erhalten wir für den systematischen Fehler bei der Zentimeterklasseneinteilung einen Korrektionsfaktor  $K = 0,99967$ , ebenfalls gleich in beiden Fällen.

Wegen der geringen Stammanzahl 100 erhalten wir ausserdem einen von der Klasseneinteilung abhängigen mittleren Fehler der Grundflächen-summe  $\varepsilon_{\Sigma G_0}^{\%} = \pm 0,371\%$  [nach (76)], und in Folge der Beschaffenheit der Bäume kommt noch ein mittlerer Fehler  $\varepsilon_G^{\%} = \pm 0,118\%$  [nach (79)] hinzu. Die beiden letzten Fehler sind gleich bei beiden Messungen. Da sämtliche mittlere Fehler voneinander unabhängig sind, summieren sie sich nach der Formel  $\varepsilon = \sqrt{\varepsilon_1^2 \cdot \left(\frac{df}{dx_1}\right)^2 + \varepsilon_2^2 \cdot \left(\frac{df}{dx_2}\right)^2 + \dots}$ , und wir erhalten daher insgesamt einen mittleren Fehler  $\varepsilon_{\Sigma G}^{\%} = \pm 0,389\%$ .

Multiplizieren wir nun sämtliche Korrektionsfaktoren miteinander, so erhalten wir das Endresultat der ersten Kluppierung =

$$A \cdot (1,00024 \pm 0,00389)$$

und der zweiten =

$$A \cdot (1,00275 \pm 0,00389), \text{ wo } A = \text{die gemessene Grundfläche.}$$

Wir finden, dass die zweite Kluppierung eine ungünstigere Wahl von Umständen in sich schliesst, und dass die beiden Kluppierungen zu niedrige Resultate ergeben. Zu wesentlichem Teile beruht dies auf der Millimeterabrundung, deren negativer Fehler alle vorkommenden systematischen positiven Fehler mehr als aufwiegt. Die endgültigen Fehler sind ziemlich unbedeutend. Betrachten wir indessen die letztangeführten Ziffern, so finden wir, dass in speziell ungünstigen Fällen der Fehler des gemessenen Grundflächenwertes doch auf  $0,275 + 3 \cdot 0,389\% = 1,442\%$ , also auf über 1%, steigen kann. In gewissen Fällen können somit die anscheinend unbedeutenden Kluppierungsfehler doch von einiger Bedeutung sein. Im allgemeinen dürften sie jedoch einen so geringen Betrag haben, dass sie keine entscheidende Rolle spielen können. Die Untersuchung spricht demnach dafür, dass die von uns angewandten Methoden der Grundflächenberechnung im grossen und ganzen als befriedigend angesehen werden können.

Die oben behandelten Kluppierungsfehler können natürlich bedeutend mehr störend auf Zuwachsbeträge einwirken, die als die Differenz zwischen zwei Kubikmasseschätzungen berechnet werden. Wie gross die Zuwachs-



fehler werden können, lässt sich auf Grund der vorliegenden Untersuchung berechnen. Wir liefern hier jedoch keine Berechnung in dieser Hinsicht, da die Voraussetzungen für dieselbe in allzu hohem Grade variieren können, als dass ein Resultat von wesentlichem Werte dabei zustande kommen könnte.

Wir geben zum Schluss eine kurze Übersicht über die behandelten Grundflächenfehler.

#### Systematische Fehler.

1. Infolge der Schwankungen der Temperatur ändert sich die Grösse der Grundfläche. Die Änderung kann in dem Temperaturintervall oberhalb  $+0^{\circ}\text{C}$  annähernd auf 0,005 % pro Celsiusgrad geschätzt werden. Sobald das Holz gefriert, treten grössere Schrumpfungen ein.

2. Infolge der Transpiration entstehen tägliche Änderungen der Grösse der Grundfläche. Diese hängen zu wesentlichem Teile von der Witterung ab und erreichen ihr Maximum unter günstigen Transpirationsbedingungen. Diese letzteren haben der Regel nach ihr Optimum während des Hoch- und Nachsommers. Ihre Wirkung auf die Grösse der Grundfläche (bei Fichte) kann nach österreichischen Untersuchungen im Durchschnitt für den günstigsten Transpirationsmonat auf za. 0,14—0,16 % geschätzt werden.

3. Infolge des Verfahrens bei der Messung und Berechnung der Grundfläche aus den gemessenen Daten entstehen Fehler, für welche unter gewissen Voraussetzungen Korrektionsfaktoren berechnet werden können.

4. Durch Abrundung entstehen Fehler, welche gleichfalls in gewissen Fällen korrigiert werden können.

5. Durch vereinfachte Berechnung vieler Grundflächen zusammengenommen, d. h. durch klassenweise Berechnung, entstehen Fehler, die unter gewissen Voraussetzungen berechenbar sind.

#### Zufällige Fehler.

6. Infolge geringer Stammanzahl entstehen bei klassenweiser Grundflächenberechnung zufällige Fehler, Repräsentationsfehler, die gleichfalls unter gewissen Voraussetzungen der Berechnung zugänglich sind.

7. Infolge der Beschaffenheit der Bäume und der Unvollkommenheit der Messmethoden entstehen bei der Grundflächenmessung weitere zufällige Fehler, die durch Untersuchungen ihrer Grösse nach bestimmt werden können.

8. Es kommen ausserdem Fehler hinzu, die zunächst den persönlichen Eigenschaften und Eigentümlichkeiten der betreffenden Messperson zugeschrieben werden können. Dieses persönliche Moment ist schwer zu berechnen, gewisse Höchstwerte für seine Bedeutung können jedoch festgestellt werden.

Auch wenn alle hier erwähnten Fehlermöglichkeiten, mit Ausnahme jedoch der letzten, die ziemlich unberechenbar ist, Gelegenheit erhalten, in sehr ungünstiger Weise zusammenzuwirken, bleibt doch der Fehler der Endsumme bei einer nicht allzu kleinen Baumanzahl, etwa 100 Stück, sehr unbedeutend. Betrachtet man die Berechnung der Grundfläche als ein Glied in der Schätzung der Kubikmasse, so kann man mit grosser Sicherheit behaupten, dass mit Rücksicht auf die gegenwärtigen Methoden zur Kubikmassenschätzung einer Probefläche die von Grundflächenfehlern herrührenden Kubikmassenfehler von sehr untergeordneter Bedeutung sein müssen.

In Anbetracht der grossen Schwierigkeiten, die die forstlichen Messungen im allgemeinen darbieten, ist es von grosser Bedeutung und erreicht es zur Freude, feststellen zu können, dass wenigstens einer der grundlegenden Massfaktoren so gut wie fehlerfrei gemessen werden kann.

### Literatur.

*Hier ist nur die Literatur verzeichnet, die eine mehr direkte Bedeutung für den vorliegenden Aufsatz hatte.*

- AMILON, J. A., 1928, Grov- och långgreniga träd etc. Skogsv.-fören. Tidskrift.  
 CAJANUS, W., 1914, Über die Entwicklung gleichaltriger Waldbestände. Eine statistische Studie, I. Acta forestalia Fennica, 3.  
 CHARLIER, C. V. L., 1920, Vorlesungen über die Grundzüge der mathematischen Statistik, Lund.  
 —, 1906, Researches into the theory of probability, Medd. fr. Lunds astron. observatorium, Ser. II, N:o 4.  
 DOUGAL, MAC D. T., 1921, Growth in trees, Proc. Americ. Philosophic. Soc.  
 —, 1920, Measurements of Season's Growth of Trees etc., Carn. Inst. of Washington, Year Book N:o 19.  
 —, 1924, Growth in trees and massive organs of plants, Carn. Inst. of Washington, Publ. N:o 350.  
 ENGLER, A., 1918, Tropismen und excentrisches Dickenwachstum der Bäume, Preisschrift, Zürich.  
 FRIEDRICH, J., 1897, Über den Einfluss der Witterung auf den Baumzuwachs, Mittheil. aus dem forstl. Versuchsw. Österreichs.  
 GRUNDNER, F., 1882, Untersuchungen über die Querflächenermittlung der Holzbestände, Berlin.  
 HARTIG, R., 1882, Ueber die Vertheilung der organischen Substanz, des Wassers und Luftraumes in den Bäumen etc., Berlin.  
 JACCARD, P., 1919, Nouvelles recherches sur l'accroissement en épaisseur des arbres, Lausanne et Genève, Libr. Payot & Cie.

- KINNMAN, G., 1925, Studier rörande flytbarheten hos flottgods, Skogsv.-fören. Tidskrift.
- LANGSÆTER, A., 1929, Diameterklassenes gjennomsnittlige diameter, Medd. fra det norske skogforsöksvesen.
- LÖNNROTH, E., 1926, Untersuchungen über die innere Struktur und Entwicklung gleichaltriger, naturnormaler Kiefernbestände etc., Acta forestalia Fennica 30.
- METZGER, C., 1893, Der Wind als massgebender Faktor etc. Mündener forstl. 1 efte.
- , 1894, Studien über den Aufbau der Waldbäume und Bestände nach statischen Gesetzen, Mündener forstl. Hefte.
- MÜLLER, U., 1915, Lehrbuch der Holzmesskunde, 2. Aufl., Berlin.
- NAKASHIMA, H., 1924, Über den Einfluss meteorologischer Faktoren auf den Baumzuwachs (I). Journ. Coll. Agric., Hokkaido (Sapporo).
- NÖRDLINGER, H., 1872, Der Holzring als Grundlage des Baumkörpers. Eine dendrologische Skizze, Stuttgart.
- PEARSON, KARL, 1924, Tables for statisticians and biometricians, Part I, Second Edition.
- ROMELL, L.-G., 1925, Växttidsundersökningar å tall och gran (französisches Resümee). Medd. från Statens Skogsförsöksanstalt.
- SCHMIDTBORN, W., 1863, Soll man die Stärke (Querfläche) der Modellstämme nach dem Durchmesser oder nach dem Umfang ermitteln? Allg. Forst- und Jagdzeitung.
- SCHWARZ, F., 1899, Physiologische Untersuchungen über Dickenwachstum und Holzqualität von Pinus sylvestris, Berlin.
- SERRET-SCHEFFER, 1921, Lehrbuch der Diff.- und Integralrechnung, Teubner, Leipzig, Berlin.
- STÄLFELT, M. G., 1926, Die Abhängigkeit der »stomatären Diffusionskapazität« von der Exposition der Objekte, Kungl. Svenska Vet. Akad. Handl. Tredje Serien, Band 2, No 8.
- , 1927, Die photischen Reaktionen im Spaltöffnungs-Mechanismus, Flora, 21. Band.
- , 1928, Die Abhängigkeit der photischen Spaltöffnungsreaktionen von der Temperatur, Planta, 6. Band, 2. Heft.
- , 1928, Die physiologisch-ökologischen Bedingungen der stomatären Diffusionskapazität. Skogsv.-fören. Tidskrift.
- TIRÉN, L., 1928, Einige Untersuchungen über die Schaftform, Medd. från Statens Skogsförsöksanstalt.
- TISCHENDORF, W., 1927, Lehrbuch der Holzmassenermittlung, Berlin.
- Föreskrifter ang. de allm. skogarnas indelning till ordnad hushållning, 1916.

### Nachtrag.

Zu S. 278 und 279 sei hier bemerkt, dass man sich entweder denken kann, dass die GAUSS'sche Bedingung erfüllt ist, und dass eine Approximation bezüglich der gleichen Stammanzahl beiderseits der Durchschnittsdurchmesser stattfindet, wie es hier geschieht, oder auch, dass der Mediandurchmesser gewählt wird und also die Approximation die GAUSS'sche Bedingung betrifft. Die erstere Methode scheint einfacher, und da sie zweifellos für den Zweck dieser Untersuchung genügend genau ist, wurde sie benutzt.

Zu S. 286 sei bemerkt, dass bei der Berechnung der  $\sigma_2$ -Prozente nicht berücksichtigt wurde, dass in dem aktuellen Fall nur eine geringe Anzahl Messungen (10 St.) der Mittelberechnung zugrunde liegt. Da es sich aber so verhält, kann daraus abgeleitet werden,

dass die Prozente signifikanter werden, wenn man sie mit dem Faktor  $\sqrt{\frac{10}{9}} = 1.054$  multipliziert. Dies ändert nichts an den Folgerungen auf S. 292 und 293.

## RESUMÉ.

## Om grundyteberäkning och dess noggrannhet.

För det nuvarande och framtida skogsvetenskapliga arbetet är det av största vikt att äga en ingående och tillförlitlig kunskap om de använda mättnings- och arbetsmetodernas noggrannhet. Exakta mättningsmetoder och invändningsfria arbetsprinciper innebära alltid fördelar, men i all synnerhet är detta fallet när man, som inom skogsvetenskapen är vanligt, i stor utsträckning arbetar med differenser mellan de uppmätta storheterna.

Ofta strävar skogsmannen vid sina mätningar i sista hand mot kännedomen om trädens kubikmassa. För att beräkna denna äro åtminstone tre mått nödvändiga, nämligen ett mått på grundytan, ett på höjden och ett på formen. Lättast är i regel att erhålla uppgift om grundytans storlek, ty denna kan mätas direkt.

De fel, som man riskerar att begå vid grundytemätningen, kunna med ganska enkla medel utrönas. Av den anledningen har frågan om grundytemätningens noggrannhet i första hand upptagits till behandling. De tidigare undersökningar, som i rikt mått finnas utförda på detta område, kunna icke anses tillräckligt uttömmande. Man kan visserligen på förhand göra den spådomen, att grundytefelen knappast kunna vara mycket stora, men vissheten om hur det verkliga förhåller sig, är naturligtvis lika mycket värd, vare sig felen äro stora eller små.

1:o. På grund av temperaturväxlingar ändras grundytans storlek med märkbara belopp. Dessa ändringar förlöpa kontinuerligt inom temperaturintervallet ovan  $0^{\circ}$  C. Vid fryspunkten eller något därunder inträder sannolikt en språngvis skeende krympning av ganska betydande storlek, nämligen omkring 0,4 %, räknat på diametern. Diameterändringen per grad ovan 0-punkten kan skattas till c:a 0,005 %. (Sid. 231).

2:o. Transpirationen förorsakar under vegetationsperioden dagliga ändringar i grundytans storlek. Dessa äro till väsentlig del beroende av väderleken och nå sitt maximum under gynnsamma transpirationsbetingelser. Emedan dessa i regel genomlöpa ett optimum under hög- och eftersommaren äro de ifrågakommande grundyteändringarna mest märkbara under denna tid. Deras inverkan på grundytans storlek är, ehuru i regel obetydlig, dock fullt mätbar. Enligt mätningar av FRIEDRICH kunna de stiga till omkring 0,15 % i medeltal för en hel månad (augusti, sid. 234).

3:o. Alltefter sättet för grundytans mätning och beräkning kunna fel uppstå, för vilka korrektionsfaktorer under vissa förutsättningar kunna beräknas. Fel av denna art uppstå t. ex. när man beräknar en elliptisk eller oval grundyta som en cirkelyta med en diameter, som är = medeltalet av grundytans största och minsta diameter. Flera dylika specialfall av växlande

art kunna tänkas och i undersökningen ha 14 sådana blivit behandlade. Av speciellt intresse är beräkningen av felet i medeltal vid uppmätning av ett helt bestånd, vilken beräkning i den tidigare litteraturen icke blivit fullständigt utförd. Felen av denna art äro positiva och hålla sig i regel under 1 %.

4:o. Vid skogliga precisionsmätningar antecknas diametrarna i allmänhet i hela millimeter med avrundning nedåt. Härigenom uppkomma avrundningsfel, emedan varje diameter, i stort medeltal kommer att uppskattas 0,5 mm för lågt. Med största lätthet beräknas avrundningsfelets storlek för olika diametrar. För att kunna göra en beräkning av avrundningsfelets betydelse vid uppmätning av hela bestånd eller provytor ha vissa förutsättningar gjorts beträffande beståndets dimensionsfördelning. Det antages, med stöd av utförda undersökningar, att denna kan återgivas av en normal frekvenskurva av den GAUSS'ska typen, varvid dock ett par specialfall urskilts. Undersökningen visar, att avrundningsfelet oväntat nog uppgår till ganska betydande belopp, i vissa fall över 1 %. Felet är negativt. (Sid. 270—271).

5:o. Genom förenklad gemensam beräkning av många träd's grundtyor, med andra ord klassvis grundtyteberäkning, uppstå även fel. Dessa äro till sin natur av två slag, dels systematiska och dels tillfälliga. De systematiska felen bero därpå, att man antager, att alla träden i en viss klass ha samma diameter, i regel klassmittens diameter, medan i själva verket klassens sanna medeldiameter ligger något på sidan om klassmitten. Denna förskjutnings storlek beror på beskaffenheten av beståndets dimensionsfördelning samt på klassvidden. Beräkningar hava utförts över felets storlek under antagande av att dimensionsfördelningen kan återgivas av den förut omnämnda normala frekvenskurvan. Som ett exempel kan nämnas, att vid encentimeters klassindelning av ett bestånd med upp till 30 cm:s diametrar och normal frekvensfördelning kan felet uppgå till omkring + 0,03 %, vid 3 cm:s klassindelning till + 0,3 % och vid 6 cm:s klassindelning till + 1,2 %. I fråga om vissa andra frekvensfördelningstyper kunna felen bliva större. (Sid. 274).

I vissa fall, såsom bl. a. vid Statens skogsindelningar, finnes föreskrivet att diameterklassens grundtya skall beräknas efter en diameter, som ligger nedom klassmitten. Orsaken till denna föreskrift torde vara tvåfaldig. Dels har man med kännedom om den i regel fallande frekvensfördelningen på en hel skog dragit den slutsatsen, att medeldiametern i en klass bör ligga under klassmitten och dels har man genom sänkningen av den diameter, varefter klassgrundytan beräknats velat motverka de i regel positiva klavningsfelen. Då det icke torde sakna intresse att erhålla en uppfattning om, huru den föreskrivna sänkningen verkar, skall här i korthet redogöras för en beräkning, som utförts i detta syfte. Denna fråga har i den tyska texten endast blivit antydd.

De har visat sig, att frekvensfördelningen på större skogskomplex enligt Riksskogstaxeringens mätningar tämligen nära ansluter sig till den normala frekvenskurvan inom diameterområdet 8 à 10 cm och däröver. Denna kurva har därför använts vid beräkningen av grundtyvärdena.

Vid skogsindelning enligt typ B, norrlandsindelning, sker indelning i 5 cm:s klasser med början vid 10 cm. I beräkningen ingå icke klassmittdiametrarna 12,5, 17,5, cm etc. utan diametrarna, 12,0, 17,0 cm etc. Det visar sig, att på grund av denna sänkning underskattas grundytan räknad från 10 cm och däröver med 3,2 % av det vid indelningen erhållna värdet. Hade klassmittdiametern använts vid beräkningen hade det uppstått en överskatt-

ning av 2,2 %. Emedan bestämningen av höjd och form icke röner något nämnvärt inflytande av diametersänkningen kunna dessa felprocenter anses gälla även kubikmassan.

Vid skogsindelning enligt typ A, sörlandsindelning, sker indelning i 3 cm:s klasser med början vid 8 cm. I beräkningen ingå icke klassmittdiametrarna 9,5, 12,5 etc. utan diametrarna 9, 12 cm etc. För att förenkla räkningarna har i denna undersökning början gjorts med 9 i stället för med 8 cm. Det visar sig nu, att grundytan å hela skogen vid sörlandsindelning räknat från 9 cm och däröver underskattas med 4,9 % av det vid indelningen erhållna värdet. Hade räkning skett med klassmittdiametrarna hade det uppstått en överskattning av 0,8 %. Även dessa fel gälla direkt kubikmassan.

Det visar sig således, att den föreskrivna sänkningen av klassdiametern har varit för kraftig, emedan vi med den kännedom om de positiva, systematiska klavningsfelen, som vi i denna uppsats erhållit, icke kunna skatta dessa ens till 0,5 %. Rena slarvfel böra knappast korrigeras genom föreskrifter av denna art och ej heller synes detta vara lämpligt ifråga om sådana positiva fel, som eventuellt uppstå på grund av rotansvällningens inverkan. Överhuvudtaget är ett teoretiskt riktigt värde på grundytan och kubikmassan icke uppnåeligt på annat sätt än genom anbringande av till storleken utrönta korrekationer för var och en av de felkällor, som man har att räkna med. Då som vi sett stora klassvidder över huvudtaget innebära en väsentlig felkälla, kunna grundytebestämningarna i hög grad skärpas genom användande av mindre klasser, eller genom användande av speciella beräkningsmetoder. (Sid. 276).

6:o. De tillfälliga fel, som uppträda vid klassindelningsförfarandet häröra från den omständigheten, att ett till antalet begränsat stammaterial aldrig fullständigt kan representera den dimensionsfördelningstyp, som beståndet tillhör. Om vi nämligen tänka oss ett stamrikt bestånd, vars dimensionsfördelning återgives av en normal frekvenskurva, och vi ur detta bestånd utan val plocka ut låt oss säga 100 träd, så komma dessa träds dimensionsfördelning på grund av rena tillfälligheter, att avvika något från den typiska normala dimensionsfördelning, som beståndet i stort äger. Vid skogliga jämförande försök är det av principiell betydelse att observera detta förhållande. Storleken av det uppkommande felet beror till väsentlig del förutom av klassvidden även av antalet uppmätta träd och av dessas absoluta grovlek. De utförda beräkningarna visa, att stora klassvidder äro mycket ogynnsamma, och att sådana icke böra ifrågakomma, särskilt icke vid vetenskapliga undersökningar. Vid encentimeters klassindelning och diametrar upp till omkring 30 cm är medelfelet av den ungefärliga storleken  $\pm 0,3$  % om trädantalet är 200 och  $\pm 0,4$  % om det är 100. (Sid. 282).

7:o. På grund av trädens beskaffenhet och mätningsskottens ofullkomlighet uppstå vid grundtemätningen ytterligare tillfälliga fel. Om t. ex. grundytan i ett bestånd uppmättes flera gånger genom korsklavning enligt exakt samma metod alltså bl. a. genom anläggning av klaven mot samma på stammen utmärkta punkt, så visar det sig, att summan av alla de enskilda trädens grundtytor blir olika stor i de olika mätningarna. Detta beror på rena mätningssfel samt i hög grad även på tvärsnittets beskaffenhet i fråga om form, barkens utbildning, oregelbundenheter etc. Tämligen vidlyftiga undersökningar

hava gjorts för att utröna detta fels storlek. Det har visat sig, att hos tall är maximalmedelfelet på en enskild grundyta omkring  $\pm 1,5$  %. (Sid. 288).

8:o. Dessutom tillkomma fel, vilka närmast kunna tillskrivas vederbörande förrättningsmans personliga egenskaper och egenheter. Detta personliga moment är svårt att beräkna, men vissa maximalvärden för detsammas inverkan ha dock kunnat utrönas. Dessa maximalvärden röra sig vid omkring  $\pm 1,5$  à  $2,0$  %. (Sid. 293—294).

Även om alla de här nämnda felmöjligheterna utom den sista, vilken är tämligen oberäknelig, få tillfälle att på ett mycket ogynnsamt sätt samverka, blir felet på slutsumman av ett icke alltför obetydligt antal träd (omkring 100 st.) mycket litet. Om man uppfattar grundytans beräkning som ett led i uppskattningen av kubikmassan, kan man därför med stor säkerhet påstå, att med hänsyn till nuvarande metoder för en provytas kubikmasseuppskattning, de från grundtytefel härflytande kubikmassefelelen måste vara av synnerligen underordnad betydelse. Så stora svårigheter, som de skogliga mätningarna i allmänhet erbjuda, är det av stor betydelse och en källa till glädje att kunna fastslå, att åtminstone en av de grundläggande massafaktorerna kan uppmätas så gott som felfritt.

---